

Muraglie Cosmiche: Fortificazioni come Problemi di Ottimizzazione

Geometria delle Fortificazioni e Problemi Isoperimetrici

L'Architettura Militare come Matematica Incarnata

La storia delle fortificazioni rappresenta uno dei capitoli fondamentali dell'intersezione tra matematica applicata, ingegneria civile e strategia militare. Quando osserviamo le possenti mura di una città medievale o i complessi bastioni stellati di una fortezza rinascimentale, stiamo contemplando soluzioni sofisticate a problemi di ottimizzazione che hanno impegnato le menti più brillanti di ogni epoca. Questi monumenti in pietra e terra non sono semplicemente strutture difensive: sono incarnazioni tangibili di principi geometrici, teoremi matematici e calcoli strategici elaborati attraverso secoli di conflitti e innovazioni tecnologiche.

Il problema fondamentale che ogni architetto militare ha dovuto affrontare sin dall'antichità può essere formulato con precisione matematica: dato un budget limitato di risorse (manodopera, materiali, tempo), come si può massimizzare l'area protetta minimizzando al contempo il perimetro da difendere? Questa domanda apparentemente semplice conduce direttamente a uno dei problemi più eleganti della geometria classica: il problema isoperimetrico.

Il Problema Isoperimetrico e le sue Implicazioni Strategiche

Il problema isoperimetrico nella sua formulazione classica chiede: tra tutte le curve chiuse di lunghezza data, quale racchiude l'area massima? Equivalentemente, data un'area fissata A , quale forma geometrica minimizza il perimetro P necessario per racchiuderla? La risposta, nota sin dall'antichità ma dimostrata rigorosamente solo nel diciannovesimo secolo, è il cerchio.

Per una fortificazione circolare di raggio r che racchiude un'area A , abbiamo le relazioni fondamentali:

$$A = \pi r^2$$

da cui ricaviamo:

$$r = \sqrt{A/\pi}$$

Il perimetro corrispondente risulta:

$$P = 2\pi r = 2\pi\sqrt{A/\pi} = 2\sqrt{\pi A}$$

Questa è la formula del perimetro minimo: qualsiasi altra forma che racchiuda la stessa area A richiederà necessariamente un perimetro maggiore. Per comprendere la portata pratica di questo risultato, consideriamo una città che desideri proteggere un'area di un chilometro quadrato, ovvero $A = 1.000.000$ metri quadrati. Una fortificazione circolare richiederebbe:

$$P_{\min} = 2\sqrt{(\pi \times 1.000.000)} = 2\sqrt{(3.141.592,65)} = 2 \times 1.772,45 \approx 3.544,9 \text{ metri}$$

Confrontiamo questo valore con quello di un quadrato della stessa area. Per un quadrato di lato L che racchiude area A , abbiamo:

$$A = L^2$$

quindi:

$$L = \sqrt{A} = \sqrt{1.000.000} = 1.000 \text{ metri}$$

Il perimetro del quadrato sarà:

$$P_{\text{quadrato}} = 4L = 4.000 \text{ metri}$$

La differenza è sostanziale: il quadrato richiede circa 455 metri di mura in più rispetto al cerchio, rappresentando un incremento del 12,8% in termini di costi di costruzione, guarnigione necessaria e difficoltà di difesa. Se consideriamo che la costruzione di un metro lineare di mura medievali poteva richiedere settimane di lavoro da parte di decine di operai, questa differenza si traduce in mesi di lavoro aggiuntivo e costi enormi.

Geometria Rettangolare e Ottimizzazione Vincolata

Analizziamo più in dettaglio il caso rettangolare, che storicamente è stato molto comune per le fortificazioni urbane, spesso per ragioni di pianificazione urbanistica interna piuttosto che per ottimalità difensiva. Un rettangolo di dimensioni L (lunghezza) e W (larghezza) ha area:

$$A = L \times W$$

e perimetro:

$$P = 2(L + W) = 2L + 2W$$

Il problema di ottimizzazione può essere formulato così: minimizzare $P = 2L + 2W$ soggetto al vincolo $A = L \times W = \text{costante}$. Utilizzando il vincolo per esprimere W in funzione di L :

$$W = A/L$$

sostituiamo nell'espressione del perimetro:

$$P(L) = 2L + 2(A/L) = 2L + 2A/L$$

Per trovare il minimo, calcoliamo la derivata rispetto a L e poniamola uguale a zero:

$$dP/dL = 2 - 2A/L^2 = 0$$

Risolviendo per L:

$$2 = 2A/L^2$$

$$L^2 = A$$

$$L = \sqrt{A}$$

Sostituendo nel vincolo:

$$W = A/L = A/\sqrt{A} = \sqrt{A}$$

Quindi $L = W$, il che significa che il rettangolo ottimale è un quadrato. Questo risultato può sembrare intuitivo, ma la dimostrazione rigorosa conferma ciò che molti architetti militari compresero empiricamente: tra le forme rettangolari, il quadrato minimizza il perimetro.

La derivata seconda conferma che si tratta di un minimo:

$$d^2P/dL^2 = 4A/L^3 > 0 \text{ per } L > 0$$

Il valore minimo del perimetro per un rettangolo è quindi:

$$P_{\text{min_rettangolo}} = 4\sqrt{A}$$

che, per il nostro esempio con $A = 1.000.000 \text{ m}^2$, dà esattamente i 4.000 metri calcolati precedentemente.

Il Compromesso tra Teoria e Pratica: Topografia e Vincoli Reali

Nella realtà, nessuna fortificazione storica di rilievo è stata costruita con forma perfettamente circolare, nonostante la superiorità matematica di questa geometria. Le ragioni sono molteplici e illuminano il conflitto perpetuo tra ottimizzazione teorica e vincoli pratici.

In primo luogo, la topografia naturale del terreno impone vincoli geometrici severi. Una città costruita su una collina, su un promontorio costiero o alla confluenza di due fiumi non può semplicemente adottare una forma circolare senza ignorare completamente i vantaggi strategici offerti dal terreno naturale. L'elevazione, ad esempio, fornisce un vantaggio difensivo inestimabile: da una posizione sopraelevata, i difensori possono colpire gli attaccanti con maggiore efficacia, sfruttando sia la maggiore gittata delle armi da lancio sia la difficoltà fisica che gli assediati incontrano nel salire pendii sotto il fuoco nemico.

Consideriamo l'energia richiesta a un soldato per scalare un pendio. Se la pendenza è θ rispetto all'orizzontale e il soldato deve percorrere una distanza d lungo il pendio portando un equipaggiamento di massa m , il lavoro compiuto contro la gravità è:

$$W = m g h = m g d \sin(\theta)$$

dove $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità e $h = d \sin(\theta)$ è l'elevazione guadagnata. Per un pendio di 30° e una distanza di 100 metri con un soldato che porta 30 kg di equipaggiamento:

$$W = 30 \times 9,81 \times 100 \times \sin(30^\circ) = 30 \times 9,81 \times 100 \times 0,5 = 14.715 \text{ joule}$$

Questo lavoro si traduce in affaticamento, riduzione della velocità di avanzamento e vulnerabilità prolungata al fuoco difensivo. Un comandante militare razionale preferirà quasi sempre sacrificare qualche punto percentuale di efficienza geometrica per guadagnare questi vantaggi topografici.

In secondo luogo, la pianificazione urbanistica interna impone la propria logica. Una città non è semplicemente un'area vuota da proteggere, ma un organismo complesso con strade, piazze, edifici pubblici e quartieri residenziali. La geometria rettangolare, con la sua griglia ortogonale di strade, facilita enormemente la pianificazione urbana, il trasporto di merci, la definizione dei lotti di proprietà e la navigazione all'interno della città. Una città circolare richiederebbe una rete stradale radiale complessa, con strade curve che complicano la costruzione degli edifici e creano lotti di forma irregolare difficili da utilizzare efficientemente.

In terzo luogo, esistono considerazioni difensive che vanno oltre la semplice minimizzazione del perimetro. Come vedremo in dettaglio più avanti, l'evoluzione dell'artiglieria ha reso obsolete le mura circolari lisce, favorendo forme più complesse con bastioni angolari che permettono il fuoco incrociato. Una fortificazione perfettamente circolare presenta un problema critico: come possono i difensori su un tratto di mura colpire gli attaccanti che stanno attaccando proprio quel tratto? Nel medioevo, quando le armi da lancio avevano gittata limitata, questo problema era parzialmente risolto costruendo torri circolari sporgenti lungo il perimetro. Ma con l'avvento dell'artiglieria, la geometria difensiva dovette trasformarsi radicalmente.

La Rivoluzione della Tracce Italiana

Il sedicesimo secolo vide una rivoluzione nell'architettura militare comparabile per impatto alla rivoluzione industriale nell'economia. L'introduzione e il rapido perfezionamento dell'artiglieria a polvere da sparo rese obsolete in pochi decenni le alte mura verticali che avevano protetto le città europee per un millennio. I cannoni potevano abbattere queste mure con relativa facilità, concentrando la loro energia cinetica su aree limitate della struttura muraria.

La risposta italiana a questa crisi fu brillante nella sua sintesi di principi matematici, ingegneristici e tattici. La traccia italiana, o fortificazione alla moderna, abbandonò le alte mura verticali in favore di bastioni bassi e massicci, capaci di assorbire l'impatto dei proiettili d'artiglieria. Ma l'innovazione cruciale fu geometrica: i bastioni erano costruiti con forma angolare sporgente, progettati specificamente per eliminare ogni "zona morta" dal campo di tiro dei difensori.

Il concetto di zona morta è fondamentale per comprendere la geometria delle fortificazioni. Una zona morta è qualsiasi area immediatamente adiacente alle mura che i difensori non possono colpire con le loro armi. In una fortificazione con mura rettilinee senza sporgenze, l'area immediatamente sotto le mura costituisce una zona morta: un attaccante che raggiunge la base delle mura è protetto dal fuoco dei difensori che si trovano direttamente sopra di lui, i quali non possono inclinare sufficientemente le loro armi per colpirlo senza esporsi pericolosamente.

La trace italiana risolse questo problema attraverso i bastioni angolari. Ogni bastione sporge dal perimetro principale delle fortificazioni con un angolo calcolato precisamente per garantire che ogni punto delle cortine murarie (i tratti rettilinei tra un bastione e l'altro) possa essere battuto dal fuoco incrociato di almeno due bastioni adiacenti.

Geometria dei Bastioni: L'Angolo Ottimale

La determinazione dell'angolo ottimale per un bastione rappresenta un elegante problema di ottimizzazione vincolata che bilancia diverse esigenze contrastanti. Un bastione troppo acuto (angolo θ piccolo) presenta diversi svantaggi:

1. La struttura diventa meccanicamente debole, più vulnerabile al fuoco d'artiglieria concentrato sull'apice
2. Lo spazio interno del bastione è ridotto, limitando il numero di cannoni che possono essere posizionati
3. La sporgenza necessaria per coprire lo stesso tratto di cortina aumenta, esponendo maggiormente il bastione

Al contrario, un bastione troppo ottuso (angolo θ grande) crea zone morte negli angoli, vanificando lo scopo della costruzione.

L'analisi geometrica del problema procede come segue. Consideriamo un bastione con angolo al vertice θ che sporge di una distanza d dal perimetro principale. Due bastioni adiacenti devono essere posizionati in modo che le loro linee di tiro si intersechino coprendo l'intera cortina intermedia. Se chiamiamo L la lunghezza della cortina tra due bastioni, la condizione di copertura completa impone una relazione tra θ , d e L .

Consideriamo un sistema di coordinate con origine al centro della cortina. Il bastione di sinistra si trova a distanza $L/2$ e sporge di distanza d . L'angolo di vista da questo bastione verso il bastione opposto deve coprire l'intera cortina. Utilizzando semplice trigonometria, la condizione critica si verifica quando la linea di tiro rasente dal bastione sinistro deve raggiungere la base del bastione destro.

L'angolo α che la linea di tiro forma con la cortina è dato da:

$$\tan(\alpha) = d/(L/2) = 2d/L$$

Per garantire copertura completa, l'angolo del bastione deve soddisfare:

$$\theta/2 \geq \arctan(2d/L)$$

ovvero:

$$\theta \geq 2 \arctan(2d/L)$$

La pratica storica, basata su secoli di esperienza e affinamento, convergeva su angoli compresi tra 60° e 90° . Questo range rappresenta il compromesso ottimale tra le varie esigenze. Un angolo di 60° ($\pi/3$ radianti) offre:

- Sufficiente resistenza strutturale

- Adeguato spazio interno per l'artiglieria
- Copertura efficace delle cortine con sporgenza ragionevole
- Campi di tiro sovrapposti che creano zone di fuoco incrociato devastanti

Un angolo di 90° ($\pi/2$ radianti) rappresenta il limite superiore pratico, oltre il quale cominciano a formarsi zone morte critiche.

Il Fuoco di Fiancheggiamento: Geometria del Crossfire

Il principio del fuoco di fiancheggiamento rappresenta forse il contributo più significativo della trace italiana alla teoria delle fortificazioni. Ogni tratto delle mura non è difeso frontalmente dai soldati posizionati su quel tratto, ma lateralmente dai bastioni adiacenti. Questa configurazione crea molteplici vantaggi tattici:

1. Gli attaccanti che avanzano verso una cortina sono esposti al fuoco convergente da due direzioni diverse, rendendo impossibile trovare copertura efficace
2. I difensori sui bastioni sono protetti dalle spesse mura laterali del bastione stesso, riducendo drasticamente la loro esposizione
3. La traiettoria laterale del fuoco è ottimale per colpire formazioni di attaccanti in colonna, un fenomeno noto come "fuoco d'infilata" che può devastare intere unità militari

Analizziamo matematicamente l'efficacia del fuoco incrociato. Supponiamo che un attaccante si trovi a distanza x dal bastione sinistro e distanza $(L-x)$ dal bastione destro, dove L è la lunghezza totale della cortina. Se entrambi i bastioni sparano con una certa probabilità di colpire p per colpo, e i colpi sono indipendenti, la probabilità che l'attaccante venga colpito da almeno uno dei due bastioni in un dato momento è:

$$P(\text{colpito}) = 1 - P(\text{non colpito da sinistro}) \times P(\text{non colpito da destro}) \quad P(\text{colpito}) = 1 - (1-p)^2$$

Se $p = 0,3$ (30% di probabilità di colpo per ciascun bastione), la probabilità combinata è:

$$P(\text{colpito}) = 1 - (0,7)^2 = 1 - 0,49 = 0,51 = 51\%$$

Quindi il fuoco incrociato aumenta sostanzialmente la letalità della difesa, anche con armi di precisione limitata.

Inoltre, la probabilità di colpire tipicamente decresce con la distanza. Modellando questa dipendenza con una funzione esponenziale:

$$p(d) = p_0 \exp(-d/d_0)$$

dove d è la distanza, p_0 è la probabilità a distanza zero, e d_0 è una distanza caratteristica di decadimento, possiamo calcolare l'efficacia del fuoco in ogni punto della cortina. Per un attaccante in posizione x lungo la cortina, le distanze dai due bastioni sono:

$$d_1 = \sqrt{[(L/2 - x)^2 + d^2]} \quad d_2 = \sqrt{[(L/2 + x)^2 + d^2]}$$

dove d è la sporgenza del bastione. La probabilità totale di essere colpiti diventa una funzione della posizione, creando zone di maggiore e minore letalità lungo la cortina.

L'ottimizzazione della geometria del bastione mira a massimizzare la letalità minima lungo l'intera cortina, garantendo che non esistano punti di vulnerabilità relativa che gli attaccanti possano sfruttare.

Teoria dei Grafi delle Difese e Problemi di Copertura

Modellazione delle Fortificazioni come Grafi

La moderna teoria dei grafi offre un framework potente per analizzare e ottimizzare le fortificazioni militari. In questa rappresentazione astratta, traduciamo la complessa realtà tridimensionale di mura, bastioni e campi di tiro in un grafo matematico che cattura le relazioni essenziali tra i componenti difensivi.

Formalmente, definiamo un grafo $G = (V, E)$ dove:

- V è l'insieme dei vertici (nodi), che rappresentano i bastioni della fortificazione
- E è l'insieme degli archi (collegamenti), che rappresentano le relazioni di visibilità e copertura reciproca tra i bastioni

Ogni bastione b_i in V possiede attributi quantificabili:

- Posizione (x_i, y_i) nel piano cartesiano
- Raggio di azione efficace R_i (gittata massima delle armi posizionate)
- Angolo di apertura del campo di tiro ϕ_i
- Capacità di fuoco c_i (numero di armi che può ospitare)
- Costo di costruzione e mantenimento C_i

Un arco e_{ij} esiste tra i bastioni b_i e b_j se questi possono fornire copertura reciproca, ovvero se la distanza euclidea tra loro soddisfa:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \leq R_i + R_j$$

e se non esistono ostacoli topografici che blocchino la linea di vista tra i due bastioni.

Il perimetro difensivo viene discretizzato in una serie di segmenti $s_1, s_2, \dots, s_n$, ciascuno dei quali rappresenta un tratto di mura o cortina che deve essere protetto. La matrice di copertura $A = [a_{ij}]$ codifica quali bastioni possono difendere quali segmenti:

$a_{ij} = 1$ se il bastione b_i può coprire efficacemente il segmento s_j $a_{ij} = 0$ altrimenti

La condizione che il bastione b_i copra il segmento s_j dipende da molteplici fattori geometrici. Se il segmento s_j è definito dai suoi estremi $(x_{j,start}, y_{j,start})$ e $(x_{j,end}, y_{j,end})$, allora il bastione b_i può coprirlo se:

1. La distanza minima dal bastione a qualsiasi punto del segmento è inferiore al raggio d'azione R_i
2. L'angolo sotto cui il segmento è visibile dal bastione rientra nel campo di tiro del bastione
3. Non esistono ostacoli che bloccano la linea di tiro

Matematicamente, la distanza minima da un punto (x_0, y_0) a un segmento di linea richiede il calcolo del punto più vicino sul segmento. Se il segmento è parametrizzato come:

$$P(t) = (1-t)P_{\text{start}} + tP_{\text{end}}, \text{ con } t \in [0,1]$$

la distanza minima si ottiene minimizzando:

$$d^2(t) = (x_0 - P_x(t))^2 + (y_0 - P_y(t))^2$$

La derivata rispetto a t fornisce:

$$dd^2/dt = -2(x_0 - P_x(t))dP_x/dt - 2(y_0 - P_y(t))dP_y/dt$$

Ponendo uguale a zero e risolvendo per t , si ottiene il punto di minima distanza, a condizione che t risulti nell'intervallo $[0,1]$. Se $t < 0$ il punto più vicino è P_{start} , se $t > 1$ è P_{end} .

Il Problema del Set Covering Minimo

Il problema fondamentale nell'ottimizzazione delle fortificazioni può essere formulato come un problema di set covering: dato un insieme di segmenti di mura da proteggere e un insieme di possibili posizioni per i bastioni, selezionare il numero minimo di bastioni tale che ogni segmento sia coperto da almeno k bastioni (tipicamente $k \geq 2$ per garantire ridondanza e fuoco incrociato).

Formalmente, il problema è:

Minimizzare: $\sum_{i=1}^m c_i x_i$

Soggetto a: $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq k$ per ogni $j = 1, 2, \dots, n$

dove:

- m è il numero totale di possibili posizioni per bastioni
- n è il numero di segmenti da proteggere
- $x_i \in \{0, 1\}$ è una variabile binaria (1 se il bastione i viene costruito, 0 altrimenti)
- c_i è il costo del bastione i
- a_{ij} è l'elemento della matrice di copertura
- k è il numero minimo di bastioni richiesto per coprire ciascun segmento

Questo è un problema di programmazione lineare intera, appartenente alla classe dei problemi NP-completi. Per piccole istanze può essere risolto esattamente mediante tecniche di branch-and-bound o cutting planes. Per fortificazioni di grandi dimensioni con centinaia di possibili posizioni per bastioni, si ricorre tipicamente ad algoritmi euristici o di approssimazione.

Un algoritmo greedy classico per il set covering procede iterativamente:

1. Iniziare con insieme vuoto di bastioni selezionati $S = \emptyset$

2. Finché esistono segmenti non coperti almeno k volte: a. Per ogni bastione i non in S , calcolare il "valore" $v_i = (\text{numero di nuovi segmenti coperti}) / c_i$ b. Selezionare il bastione i^* con valore massimo c. Aggiungere i^* a S
3. Restituire S

Questo algoritmo greedy fornisce una soluzione che è garantita essere entro un fattore logaritmico dell'ottimo:

$$|S_{\text{greedy}}| \leq H(n) \times |S_{\text{opt}}|$$

dove $H(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ è il numero armonico n -esimo, e approssimativamente $H(n) \approx \ln(n) + \gamma$ dove $\gamma \approx 0,5772$ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Per $n = 100$ segmenti, abbiamo $H(100) \approx 5,19$, quindi la soluzione greedy userà al massimo circa 5,19 volte il numero ottimale di bastioni. Sebbene questo possa sembrare un rapporto di approssimazione debole, nella pratica gli algoritmi greedy spesso performano molto meglio del worst-case teorico.

Programmazione Lineare Intera e Rilassamento

Per ottenere soluzioni di qualità superiore, possiamo formulare il problema come programma lineare intero e utilizzare tecniche più sofisticate. Il programma lineare intero completo include non solo i vincoli di copertura, ma anche vincoli aggiuntivi che codificano aspetti più sottili della difesa:

Minimizzare: $\sum_{i=1}^m c_i x_i$

Soggetto a:

1. Copertura minima: $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq k$ per ogni $j = 1, 2, \dots, n$
2. Budget totale: $\sum_{i=1}^m c_i x_i \leq B$
3. Connettività: vincoli che garantiscono che i bastioni selezionati formino un grafo connesso
4. Interdipendenze: se il bastione i è selezionato, deve essere costruita anche infrastruttura di supporto
5. Integralità: $x_i \in \{0, 1\}$ per ogni i

I vincoli di connettività sono particolarmente importanti: i bastioni devono poter comunicare tra loro e ricevere rifornimenti. Questi vincoli possono essere codificati introducendo variabili di flusso f_{ijk} che rappresentano il flusso di comunicazione dal bastione i al bastione k attraverso l'arco (i,j) .

Un approccio comune per risolvere questi problemi è il rilassamento lineare: sostituiamo i vincoli di integralità $x_i \in \{0, 1\}$ con vincoli di non-negatività $0 \leq x_i \leq 1$. Il problema rilassato diventa un programma lineare standard, risolvibile in tempo polinomiale mediante il metodo del simplesso o metodi di punto interno.

La soluzione del problema rilassato fornisce un limite inferiore (lower bound) sul valore ottimale del problema intero originale. Se la soluzione rilassata è intera (tutti i x_i sono 0 o

1), allora è anche soluzione ottimale del problema originale. Altrimenti, dobbiamo "arrotondare" la soluzione frazionaria a una soluzione intera.

Esistono diverse strategie di arrotondamento:

- Arrotondamento deterministico: $x_i^* = 1$ se $x_i \geq 0,5$, altrimenti 0
- Arrotondamento randomizzato: $x_i^* = 1$ con probabilità x_i
- Arrotondamento guidato da euristiche dominio-specifiche

La qualità dell'arrotondamento può essere quantificata attraverso il gap di integralità:

$$\text{gap} = (\text{valore_soluzione_intera} - \text{valore_soluzione_rilassata}) / \text{valore_soluzione_rilassata}$$

Un gap piccolo indica che il rilassamento lineare approssima bene il problema intero originale.

Teoria dei Grafi: Copertura dei Vertici e Dominazione

La teoria dei grafi offre molteplici formulazioni alternative del problema difensivo. Un concetto centrale è quello di insieme dominante: un sottoinsieme D di vertici tale che ogni vertice del grafo è in D o è adiacente a un vertice in D .

Nel contesto delle fortificazioni, possiamo costruire un grafo di conflitto $G_{\text{conflict}} = (S, E_{\text{conflict}})$ dove:

- S è l'insieme dei segmenti di mura
- Esiste un arco tra s_i e s_j se i due segmenti richiedono protezione coordinata (ad esempio, sono adiacenti o formano un angolo critico)

Un insieme dominante in questo grafo corrisponde a un insieme di bastioni che forniscono copertura sufficiente. Il problema del minimum dominating set chiede di trovare l'insieme dominante di cardinalità minima, che è anch'esso NP-completo.

Alternativamente, possiamo considerare il problema del vertex cover: dato un grafo $G = (V, E)$, trovare il minimo sottoinsieme $C \subseteq V$ tale che ogni arco in E abbia almeno un estremo in C . Se costruiamo un grafo dove gli archi rappresentano "zone vulnerabili" che devono essere coperte da almeno un bastione, il vertex cover fornisce la configurazione difensiva minima.

La relazione tra questi problemi è profonda. Per grafi bipartiti (dove i vertici possono essere divisi in due insiemi disgiunti e ogni arco connette vertici di insiemi diversi), il problema del vertex cover può essere risolto in tempo polinomiale mediante tecniche di matching massimo. Per grafi generali, esistono algoritmi di approssimazione con fattore 2: possiamo sempre trovare una soluzione che utilizza al massimo il doppio del numero ottimale di bastioni.

Un risultato importante è il teorema di König: in un grafo bipartito, la dimensione del minimo vertex cover è uguale alla dimensione del massimo matching. Questo fornisce un metodo efficiente per calcolare soluzioni esatte quando la struttura del problema permette una formulazione bipartita.

Gittata dell'Artiglieria e Zone di Controllo

L'introduzione dell'artiglieria trasformò radicalmente la geometria delle fortificazioni e i problemi di ottimizzazione associati. Un cannone non difende semplicemente un punto o una linea, ma proietta una zona di controllo circolare (o più realisticamente, ellittica) intorno alla sua posizione.

Per un cannone posizionato al bastione b_i con gittata massima R_i , la zona di controllo è approssimativamente:

$$Z_i = \{(x, y) : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq R_i^2\}$$

L'efficacia del cannone non è uniforme all'interno di questa zona, ma decresce con la distanza a causa di molteplici fattori:

- Riduzione della precisione con la distanza
- Maggiore tempo di volo che permette agli attaccanti di cercare copertura
- Difficoltà di osservazione e correzione del tiro
- Variabilità delle condizioni atmosferiche su distanze maggiori

Un modello più realistico include una funzione di efficacia che decresce con la distanza:

$$\eta_i(x, y) = \eta_{\max} \times \exp(-d_i(x, y)^2 / (2\sigma^2))$$

dove $d_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ è la distanza dal bastione, $\eta_{\max}$ è l'efficacia massima, e σ è un parametro che controlla il decadimento. Questa è una distribuzione gaussiana bidimensionale centrata sul bastione.

L'efficacia totale in un punto (x, y) dovuta a tutti i bastioni è:

$$\eta_{\text{total}}(x, y) = \sum_{i=1 \text{ fino a } m} x_i \eta_i(x, y)$$

dove $x_i \in \{0, 1\}$ indica se il bastione i è stato costruito. L'obiettivo dell'ottimizzazione diventa massimizzare l'efficacia minima su tutto il perimetro difensivo:

Massimizzare: $\min\{\eta_{\text{total}}(x, y) : (x, y) \in \text{Perimetro}\}$

Questo è un problema di ottimizzazione min-max, significativamente più complesso dei problemi di set covering lineari discussi precedentemente.

Zone di Sovrapposizione e Fuoco Multiplo

Le zone dove i campi di tiro di più bastioni si sovrappongono sono di particolare importanza strategica. In questi settori, gli attaccanti devono confrontarsi con fuoco convergente da multiple direzioni, aumentando drasticamente il tasso di perdite atteso.

Se modelliamo l'arrivo dei proiettili come processi stocastici indipendenti, con il bastione i che spara con tasso λ_i (colpi per unità di tempo), la probabilità che un attaccante nella zona di sovrapposizione venga colpito in un intervallo di tempo dt è approssimativamente:

$$P(\text{colpito in } dt) \approx (\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i) dt$$

dove k è il numero di bastioni che coprono quella zona e p_i è la probabilità di colpo per il bastione i data la distanza e altri fattori. Per intervalli di tempo piccoli, questa è una buona approssimazione.

Il tempo medio di sopravvivenza T_{survival} di un attaccante nella zona è:

$$T_{\text{survival}} = 1 / (\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i)$$

Questo dimostra quantitativamente perché le zone di fuoco multiplo sono così letali: se due bastioni sparano ciascuno con tasso $\lambda = 2$ colpi/minuto e probabilità di colpo $p = 0,2$, un attaccante in zona coperta da un solo bastione ha tempo di sopravvivenza atteso:

$$T_1 = 1 / (2 \times 0,2) = 1 / 0,4 = 2,5 \text{ minuti}$$

mentre in zona coperta da entrambi:

$$T_2 = 1 / (2 \times 2 \times 0,2) = 1 / 0,8 = 1,25 \text{ minuti}$$

Il tempo di sopravvivenza si dimezza, raddoppiando l'efficacia difensiva.

Spaziatura Ottimale dei Bastioni

Un problema pratico cruciale è determinare la spaziatura ottimale tra bastioni adiacenti. Questa deve bilanciare due esigenze contrastanti:

- Spaziatura minore garantisce maggiore sovrapposizione dei campi di tiro, ma aumenta il numero di bastioni necessari e quindi i costi
- Spaziatura maggiore riduce i costi, ma può creare zone vulnerabili con copertura insufficiente

Supponiamo che ogni bastione abbia gittata efficace R e costo unitario C . Il costo totale per proteggere un perimetro di lunghezza P è approssimativamente:

$$\text{Costo}_{\text{totale}} = (P / d) \times C$$

dove d è la distanza tra bastioni adiacenti. Per garantire che ogni punto del perimetro sia coperto da almeno due bastioni, considerando geometria semplificata con bastioni che proiettano zone circolari, la condizione di copertura doppia richiede:

$$d \leq 2R \cos(\alpha)$$

dove α è l'angolo oltre il quale consideriamo la copertura inefficace. Per copertura laterale efficace, tipicamente $\alpha \approx 30-45^\circ$, dando:

$$d \leq 2R \times \cos(30^\circ) = 2R \times (\sqrt{3}/2) \approx 1,73R$$

La pratica storica convergeva su $d \approx 1,5R$ come compromesso ottimale. Questo valore garantisce:

- Ogni punto è coperto da almeno due bastioni
- Esiste sovrapposizione significativa nelle zone critiche
- Il numero di bastioni necessari è minimizzato entro i vincoli di sicurezza

Per un perimetro $P = 4.000$ metri e gittata $R = 300$ metri, il numero ottimale di bastioni è:

$$N = P / (1,5R) = 4.000 / (1,5 \times 300) = 4.000 / 450 \approx 8,9 \approx 9 \text{ bastioni}$$

Questo fornisce una prima approssimazione che deve poi essere raffinata considerando la topografia specifica, la forma del perimetro e altri fattori locali.

Tattiche di Fuoco, Geometria Balistica e Progettazione del Terreno

Fuoco d'Infilata: La Geometria del Massacro

Il fuoco d'infilata, o enfilade fire nella terminologia militare anglosassone, rappresenta una delle tattiche più devastanti disponibili ai difensori di una fortificazione ben progettata. Il termine deriva dal francese "enfiler", che significa letteralmente "infilare" come si infilano perle su un filo, evocando l'immagine di proiettili che attraversano longitudinalmente una formazione nemica.

La superiorità geometrica del fuoco d'infilata rispetto al fuoco frontale può essere dimostrata con analisi matematica rigorosa. Consideriamo una colonna di attaccanti che avanza verso le mura. Se i difensori sparano frontalmente, un proiettile che manca il primo soldato probabilmente mancherà anche tutti gli altri, avendo attraversato la formazione senza colpire nessuno. In contrasto, il fuoco laterale che percorre longitudinalmente la colonna ha multiple opportunità di colpire bersagli lungo tutta la sua traiettoria.

Quantifichiamo questo effetto. Supponiamo che una colonna di attaccanti sia formata da n soldati disposti in fila indiana, ciascuno occupante una larghezza w e separato dal successivo di una distanza s . La lunghezza totale della colonna è:

$$L_{\text{colonna}} = n(w + s) - s \approx n(w + s)$$

Un proiettile sparato lateralmente che attraversa questa colonna ha probabilità p_{singolo} di colpire ciascun soldato che incontra. Se modelliamo gli eventi di colpo come indipendenti (approssimazione ragionevole per armi da fuoco), la probabilità che il proiettile colpisca almeno un soldato è:

$$P(\text{almeno un colpo}) = 1 - (1 - p_{\text{singolo}})^n$$

Per $n = 10$ soldati e $p_{\text{singolo}} = 0,15$ (15% di probabilità per soldato):

$$P(\text{almeno un colpo}) = 1 - (0,85)^{10} = 1 - 0,1969 = 0,8031 \approx 80\%$$

Confrontiamo con il fuoco frontale, dove la probabilità di colpire un soldato è semplicemente $p_{\text{singolo}} = 15\%$. Il fuoco d'infilata aumenta l'efficacia di oltre 5 volte.

Il numero atteso di vittime per colpo laterale è:

$$E[\text{vittime}] = \sum_{i=1}^n p_{\text{singolo}} = n \times p_{\text{singolo}} = 10 \times 0,15 = 1,5 \text{ vittime}$$

Questo calcolo presuppone che il proiettile mantenga energia sufficiente per colpire tutti i soldati, assunzione ragionevole per armi da fuoco a distanze corte e medie.

La geometria delle fortificazioni doveva essere progettata specificamente per massimizzare le opportunità di fuoco d'infilata. Le cortine rettilinee tra bastioni erano orientate in modo che i cannoni sui bastioni potessero sparare parallelamente alla loro lunghezza. Un attaccante che avanza verso la cortina si trova inevitabilmente esposto al fuoco d'infilata da almeno uno dei bastioni laterali.

Matematicamente, se un bastione si trova a coordinate (x_b, y_b) e la cortina si estende lungo la linea da (x_1, y_1) a (x_2, y_2) , l'angolo α che la linea di tiro forma con la cortina è dato da:

$$\cos(\alpha) = |v_{\text{tiro}} \cdot v_{\text{cortina}}| / (|v_{\text{tiro}}| \times |v_{\text{cortina}}|)$$

dove v_{tiro} è il vettore dal bastione a un punto sulla cortina e v_{cortina} è il vettore direzionale della cortina. Un angolo α vicino a 0° (vettori paralleli) indica tiro d'infilata ottimale.

Il Glacis: Geometria dell'Esposizione Calcolata

Il glacis rappresenta uno degli elementi più sottili e matematicamente sofisticati dell'architettura fortificata. Si tratta di un pendio dolce e privo di ostacoli che si estende dalla base delle fortificazioni verso l'esterno, progettato con angolazione precisa per esporre completamente gli attaccanti al fuoco dei difensori mentre si avvicinano alle mura.

L'angolo ottimale del glacis bilancia diverse esigenze contrastanti. Un pendio troppo ripido diventa esso stesso un ostacolo che rallenta gli attaccanti ma fornisce anche una certa copertura. Un pendio troppo dolce non espone sufficientemente gli attaccanti al fuoco rasente dal parapetto della fortificazione.

L'analisi geometrica procede come segue. Consideriamo un difensore posizionato sul parapetto a altezza H sopra il terreno naturale. Un attaccante che si trova a distanza orizzontale d dalla base delle fortificazioni e sta salendo il glacis con pendenza α si trova a altezza verticale:

$$h(d) = d \tan(\alpha)$$

rispetto al punto di partenza del glacis. L'angolo β sotto cui il difensore vede l'attaccante è:

$$\tan(\beta) = (H - h(d)) / d = (H - d \tan(\alpha)) / d = H/d - \tan(\alpha)$$

Per massimizzare l'esposizione dell'attaccante, vogliamo che β sia il più piccolo possibile compatibilmente con la capacità del difensore di colpire il bersaglio. Angoli β molto piccoli (tiro quasi orizzontale) aumentano la probabilità di colpire perché il proiettile ha una traiettoria lunga attraverso la zona occupata dal bersaglio.

Inoltre, un proiettile che manca il bersaglio ha probabilità elevata di rimbalzare sul glacis e colpire altri attaccanti più indietro. Questo effetto di rimbalzo era particolarmente devastante con le palle di cannone sferiche utilizzate storicamente, che potevano rimbalzare multiple volte mantenendo energia letale.

La pratica ingegneristica convergeva su angoli compresi tra 30° e 45° come ottimali. Un angolo di 30° fornisce:

$$\tan(30^\circ) = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$$

Questo significa che per ogni metro di avanzamento orizzontale, l'attaccante sale circa 0,577 metri. Per un glacis lungo 50 metri, l'elevazione totale è:

$$\Delta h = 50 \times \tan(30^\circ) = 50 \times 0,577 \approx 28,9 \text{ metri}$$

Un angolo di 45° darebbe:

$$\Delta h = 50 \times \tan(45^\circ) = 50 \times 1 = 50 \text{ metri}$$

Questo sarebbe eccessivo, trasformando il glacis in una vera barriera fisica che rallenterebbe troppo l'avanzata ma fornirebbe anche copertura parziale agli attaccanti che potrebbero sdraiarsi sul pendio.

Defilata: L'Asimmetria Geometrica della Protezione

Il principio della defilata è complementare a quello del glacis: mentre il glacis espone gli attaccanti, la defilata protegge i difensori. Una posizione è detta "defilata" quando è protetta dal fuoco nemico grazie alla geometria del terreno o delle strutture.

Matematicamente, un difensore posizionato dietro un parapetto di altezza h_p a distanza d_p dal bordo è defilato rispetto a un attaccante a distanza D se l'angolo di elevazione minimo necessario per colpirlo supera un valore critico:

$$\theta_{\min} = \arctan(h_p / D)$$

Per un parapetto alto $h_p = 2$ metri e un attaccante a $D = 100$ metri:

$$\theta_{\min} = \arctan(2/100) = \arctan(0,02) \approx 1,146^\circ \approx 0,02 \text{ radianti}$$

Questo angolo apparentemente piccolo è sufficiente per rendere molto difficile colpire un difensore che si espone solo brevemente per sparare. Le armi da fuoco dell'epoca, con precisione limitata, avevano probabilità molto bassa di colpire un bersaglio che richiede tale precisione angolare.

L'asimmetria geometrica è ancora più pronunciata quando si considera la psicologia e la fisiologia del combattimento. Il difensore può:

- Osservare il campo di battaglia da posizione protetta
- Scegliere il momento ottimale per esporsi e sparare
- Ritirarsi immediatamente dopo aver sparato

- Operare da posizione stabile e confortevole

L'attaccante invece:

- Deve avanzare su terreno esposto e spesso irregolare
- È sotto fuoco continuo durante l'avanzata
- Deve trasportare equipaggiamento pesante (scale, arieti, ecc.)
- Opera in condizioni di stress estremo

Questa asimmetria si traduce in rapporti di perdite fortemente favorevoli ai difensori. Le fonti storiche suggeriscono che gli assediati potevano subire perdite 5-10 volte superiori a quelle dei difensori durante gli assalti a fortificazioni ben progettate e difese.

Teoria Balistica: La Fisica dei Proiettili

La progettazione efficace delle fortificazioni richiedeva comprensione approfondita della balistica. Sebbene la teoria matematica completa della traiettoria dei proiettili sia stata sviluppata solo nel diciassettesimo secolo con il lavoro di Galileo e altri, gli artiglieri svilupparono conoscenza empirica sofisticata attraverso secoli di esperienza.

La traiettoria di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0 a angolo θ rispetto all'orizzontale, ignorando la resistenza dell'aria, è descritta dalle equazioni parametriche:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta) t \quad y(t) = v_0 \sin(\theta) t - (1/2) g t^2$$

dove $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione gravitazionale. Eliminando il parametro temporale t , otteniamo l'equazione della traiettoria:

$$y = x \tan(\theta) - (g x^2) / (2 v_0^2 \cos^2(\theta))$$

Utilizzando l'identità trigonometrica $1/\cos^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$, possiamo riscrivere:

$$y = x \tan(\theta) - (g x^2) / (2 v_0^2) \times (1 + \tan^2(\theta))$$

Questa è l'equazione di una parabola. La gittata massima R (distanza orizzontale al ritorno al livello iniziale, $y = 0$) si ottiene risolvendo:

$$0 = R \tan(\theta) - (g R^2) / (2 v_0^2) \times (1 + \tan^2(\theta))$$

Semplificando:

$$\tan(\theta) = (g R) / (2 v_0^2) \times (1 + \tan^2(\theta))$$

Risolvendo per R :

$$R = (v_0^2 \sin(2\theta)) / g$$

dove abbiamo utilizzato l'identità $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$.

Questa formula fondamentale mostra che la gittata massima assoluta si ottiene quando $\sin(2\theta) = 1$, ovvero quando $2\theta = 90^\circ$, quindi $\theta = 45^\circ$.

Per un cannone con velocità alla bocca $v_0 = 300$ m/s (valore realistico per artiglieria del sedicesimo secolo), la gittata massima teorica è:

$$R_{\text{max}} = v_0^2 / g = (300)^2 / 9,81 = 90.000 / 9,81 \approx 9.174 \text{ metri}$$

Nella pratica, la resistenza dell'aria riduce significativamente questa gittata, tipicamente di un fattore 2-3, portando a gittate effettive di 3.000-4.500 metri per artiglieria pesante.

L'altezza massima raggiunta dal proiettile si ottiene quando la componente verticale della velocità si annulla:

$$v_y(t_{\text{max}}) = v_0 \sin(\theta) - g t_{\text{max}} = 0$$

da cui:

$$t_{\text{max}} = (v_0 \sin(\theta)) / g$$

L'altezza massima è:

$$h_{\text{max}} = v_0 \sin(\theta) t_{\text{max}} - (1/2) g t_{\text{max}}^2 = (v_0^2 \sin^2(\theta)) / (2g)$$

Per $\theta = 45^\circ$ e $v_0 = 300$ m/s:

$$h_{\text{max}} = (300^2 \times \sin^2(45^\circ)) / (2 \times 9,81) = (90.000 \times 0,5) / 19,62 \approx 2.294 \text{ metri}$$

Questa altezza elevata spiega perché il tiro parabolico aveva efficacia limitata contro bersagli protetti: la maggior parte della traiettoria avviene ad altezze molto superiori alle fortificazioni.

Ottimizzazione dell'Angolo di Tiro per Bersagli Elevati

Quando il bersaglio non è al livello del cannone ma a altezza H diversa, l'angolo ottimale cambia. Supponiamo che il cannone sia a quota zero e il bersaglio a quota H a distanza orizzontale D . L'equazione della traiettoria diventa:

$$H = D \tan(\theta) - (g D^2) / (2 v_0^2) \times (1 + \tan^2(\theta))$$

Questa è un'equazione quadratica in $\tan(\theta)$. Ponendo $u = \tan(\theta)$:

$$H = Du - (g D^2) / (2 v_0^2) \times (1 + u^2)$$

Riorganizzando:

$$(g D^2) / (2 v_0^2) \times u^2 - Du + H + (g D^2) / (2 v_0^2) = 0$$

Moltiplicando per $2v_0^2 / (gD^2)$:

$$u^2 - (2v_0^2) / (gD) \times u + (2v_0^2 H) / (gD^2) + 1 = 0$$

Le soluzioni sono:

$$u = [v_0^2 / (gD)] \pm \sqrt{[v_0^2 / (gD)]^2 - [2v_0^2 H / (gD^2) + 1]}$$

Semplificando:

$$u = [v_0^2 / (gD)] \pm \sqrt{[v_0^4 / (g^2 D^2)] - [2v_0^2 H / (gD^2)] - 1}$$

$$u = [v_0^2 / (gD)] \pm \sqrt{[v_0^4 - 2gDv_0^2 H - g^2 D^2] / (g^2 D^2)}$$

Esistono due soluzioni (traiettoria alta e traiettoria bassa) finché il discriminante è non-negativo:

$$v_0^4 - 2gDv_0^2 H - g^2 D^2 \geq 0$$

Questa condizione definisce la "envelope" di tutte le traiettorie possibili. I punti che possono essere raggiunti sono quelli all'interno dell'involuppo parabolico:

$$y_{\max}(x) = v_0^2 / (2g) - (g x^2) / (2v_0^2)$$

Per $x = D$ e $y = H$ raggiungibili, deve valere:

$$H \leq v_0^2 / (2g) - (g D^2) / (2v_0^2)$$

Per fortificazioni con mura di altezza $H = 20$ metri a distanza $D = 500$ metri, e cannone con $v_0 = 300$ m/s:

$$H_{\max} = (300^2) / (2 \times 9,81) - (9,81 \times 500^2) / (2 \times 300^2) \quad H_{\max} = 4.587,36 - 13,625 \approx 4.573,74 \text{ metri}$$

Poiché $20 < 4.573,74$, il bersaglio è ampiamente raggiungibile. Questa analisi conferma che le fortificazioni dovevano dipendere non solo dall'altezza ma dalla combinazione di altezza, spessore, angolazione e geometria complessiva per resistere al fuoco d'artiglieria.

Fisica del Trebuchet: Artiglieria Gravitazionale

Prima dell'avvento della polvere da sparo, il trebuchet rappresentava il culmine dell'ingegneria degli assedi. Questa macchina sfruttava l'energia potenziale gravitazionale di un contrappeso per lanciare proiettili massicci contro le fortificazioni.

Il principio di funzionamento si basa sulla conservazione dell'energia. Un contrappeso di massa M cade di altezza h , liberando energia potenziale:

$$E_{\text{potenziale}} = Mgh$$

Questa energia viene trasferita al proiettile di massa m , che acquisisce energia cinetica:

$$E_{\text{cinetica}} = (1/2) m v^2$$

In assenza di attriti (approssimazione ideale), la conservazione dell'energia richiede:

$$Mgh = (1/2) m v^2$$

da cui:

$$v = \sqrt{(2Mgh/m)} = \sqrt{(2gh(M/m))}$$

Il rapporto M/m è cruciale: contrappesi più pesanti rispetto al proiettile generano velocità maggiori. Storicamente, i trebuchet utilizzavano rapporti M/m compresi tra 50 e 200.

Per $M/m = 100$, $h = 6$ metri (caduta tipica del contrappeso):

$$v = \sqrt{(2 \times 9,81 \times 6 \times 100)} = \sqrt{(11.772)} \approx 108,5 \text{ m/s}$$

Questa velocità, sebbene molto inferiore a quella dei cannoni, era sufficiente per lanciare proiettili di pietra da 100-150 kg a distanze di diverse centinaia di metri. La gittata massima teorica è:

$$R = v^2 / g = (108,5)^2 / 9,81 \approx 1.200 \text{ metri}$$

Nella pratica, considerando attriti e inefficienze meccaniche (tipicamente 40-60% di efficienza), la gittata effettiva era 400-700 metri.

L'energia cinetica trasferita al proiettile è:

$$E_{\text{proiettile}} = (1/2) m v^2 = Mgh \times (m/M) \times (M/m) \times \eta = Mgh \times \eta$$

dove $\eta < 1$ è l'efficienza meccanica. Per $M = 5.000 \text{ kg}$, $h = 6 \text{ m}$, $\eta = 0,5$:

$$E_{\text{proiettile}} = 5.000 \times 9,81 \times 6 \times 0,5 = 147.150 \text{ joule} \approx 147 \text{ kJ}$$

Questa energia, concentrata sull'impatto di un proiettile di pietra da 50 kg, poteva infliggere danni considerevoli alle strutture murarie medievali.

Dinamica degli Assedi, Modelli di Logoramento e Analisi Temporale

Guerra d'Assedio come Problema di Ottimizzazione Temporale

Un assedio rappresenta fondamentalmente una competizione temporale asimmetrica tra due avversari con obiettivi opposti. L'assediente mira a minimizzare la durata T dell'assedio, riducendo i costi in termini di risorse, morale delle truppe e vulnerabilità a eserciti di soccorso. L'assedato mira a massimizzare T , sperando che l'arrivo di rinforzi, il deterioramento delle condizioni dell'assediente o considerazioni politiche costringano il nemico a ritirarsi.

Questa struttura suggerisce naturalmente una formulazione come gioco dinamico dove entrambi i giocatori ottimizzano strategie nel tempo. L'assediente controlla variabili come:

- Intensità dell'attacco $a(t)$ (quante risorse impiegare nell'assalto al tempo t)
- Investimento in operazioni di assedio $i(t)$ (costruzione di opere, scavo di mine, ecc.)
- Blocco dei rifornimenti $b(t)$ (risorse dedicate all'interdizione delle linee di rifornimento)

L'assedio controlla:

- Allocazione delle truppe alla difesa $d(t)$
- Gestione delle razioni $r(t)$ (consumo di cibo per abitante)
- Controffensive e sortite $s(t)$

La durata dell'assedio dipende da queste strategie temporali in modo complesso. Un modello semplificato potrebbe formulare l'assedio come sistema di equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione delle risorse di entrambe le parti.

Modelli di Logoramento delle Risorse dei Difensori

La risorsa più critica per i difensori è tipicamente il cibo. A differenza delle munizioni, che possono essere razionate o conservate quasi indefinitamente, il cibo deve essere consumato continuamente per mantenere in vita la popolazione e la guarnigione.

Sia $S(t)$ la quantità di scorte alimentari disponibili al tempo t , misurata in unità appropriate (ad esempio, tonnellate di grano equivalente). La popolazione totale dentro le mura è N , composta da N_c civili e N_g soldati della guarnigione:

$$N = N_c + N_g$$

Il consumo quotidiano dipende dalle razioni giornaliere $r(t)$ per persona:

$$dS/dt = -N \times r(t)$$

Con razioni costanti $r(t) = r_0$:

$$S(t) = S_0 - N r_0 t$$

dove $S_0 = S(0)$ è la quantità iniziale di scorte. La città capitolata quando le scorte si esauriscono, $S(T_{\text{assedio}}) = 0$:

$$0 = S_0 - N r_0 T_{\text{assedio}}$$

da cui:

$$T_{\text{assedio}} = S_0 / (N r_0)$$

Questa formula fondamentale mostra che la durata dell'assedio è direttamente proporzionale alle scorte iniziali e inversamente proporzionale alla popolazione e alle razioni giornaliere.

Consideriamo un esempio concreto. Una città con popolazione $N = 10.000$ persone e scorte iniziali $S_0 = 500.000$ kg di cibo. Se le razioni sono $r_0 = 0,5$ kg/persona/giorno (razioni di sussistenza minima):

$$T_{\text{assedio}} = 500.000 / (10.000 \times 0,5) = 500.000 / 5.000 = 100 \text{ giorni}$$

Se le razioni vengono ridotte a $r_1 = 0,3$ kg/persona/giorno:

$$T_{\text{assedio}} = 500.000 / (10.000 \times 0,3) = 500.000 / 3.000 \approx 166,7 \text{ giorni}$$

La riduzione del 40% nelle razioni estende l'assedio del 66,7%. Tuttavia, razioni troppo basse compromettono la capacità combattiva della guarnigione e causano sofferenze estreme alla popolazione civile.

Un modello più realistico considera che la capacità difensiva della guarnigione diminuisce con il deterioramento delle condizioni alimentari. Possiamo introdurre un'efficacia combattiva $E(r)$ che è funzione delle razioni:

$$E(r) = 1 - \exp(-r/r_{\text{critico}})$$

dove r_{critico} è il livello di razioni sotto il quale l'efficacia decade rapidamente. Per $r \gg r_{\text{critico}}$, $E \approx 1$ (piena efficacia). Per $r \ll r_{\text{critico}}$, $E \approx r/r_{\text{critico}}$ (efficacia proporzionale alle razioni).

La probabilità che la città resista a un assalto al tempo t dipende dall'efficacia combattiva:

$$P(\text{resistenza} | \text{assalto al tempo } t) = f(E(r(t)), N_g(t), F_{\text{mura}}(t))$$

dove $N_g(t)$ è la dimensione della guarnigione al tempo t e $F_{\text{mura}}(t)$ è l'integrità strutturale delle fortificazioni.

Gestione Ottimale delle Razioni

Il comandante della guarnigione assediata deve risolvere un problema di controllo ottimale: come allocare le scorte nel tempo per massimizzare la probabilità di sopravvivenza dell'assedio? Se l'assedio ha durata attesa T_{attesa} , la strategia ingenua di razioni costanti $r = S_0/(NT_{\text{attesa}})$ potrebbe non essere ottimale.

Supponiamo che la probabilità di un attacco in un dato giorno sia p_{attacco} , e che questa probabilità aumenti con il tempo (l'assediante diventa più impaziente). Supponiamo inoltre che la probabilità di resistere a un attacco dipenda dall'efficacia combattiva corrente $E(r(t))$.

Il problema di controllo ottimale può essere formulato così:

Massimizzare: $\int_0^T P(\text{sopravvivenza al tempo } t) dt$

Soggetto a:

- $dS/dt = -Nr(t)$
- $S(t) \geq 0$ per ogni $t \leq T$
- $S(T) \geq 0$ (scorte non negative alla fine)
- $r(t) \geq r_{\text{min}}$ (razioni minime di sussistenza)

Questo è un problema classico di calcolo delle variazioni. Utilizzando il principio di Pontryagin, possiamo derivare le condizioni di ottimalità. In molti casi, la soluzione ottimale ha forma "bang-bang": razioni elevate inizialmente quando la minaccia di assalto è bassa, poi riduzione rapida a livelli minimi quando l'assalto diventa imminente.

Alternativamente, se non ci sono vincoli sulle razioni minime, la soluzione potrebbe coinvolgere razioni che decrescono gradualmente nel tempo secondo un profilo ottimale $r^*(t)$ determinato dalle equazioni di Eulero-Lagrange.

Modello di Infezioni e Malattie durante gli Assedi

Un fattore spesso trascurato nei modelli semplici ma storicamente decisivo è l'impatto delle malattie. Le condizioni di sovraffollamento, igiene deteriorata e stress nutrizionale durante gli assedi creavano terreno fertile per epidemie devastanti.

Possiamo modellare la diffusione delle malattie usando un modello SIR (Suscettibili-Infetti-Rimossi). La popolazione è divisa in tre compartimenti:

- $S(t)$: individui suscettibili (non ancora infettati)
- $I(t)$: individui infetti (possono trasmettere la malattia)
- $R(t)$: individui rimossi (guariti con immunità o deceduti)

con $S(t) + I(t) + R(t) = N$ (popolazione totale costante in prima approssimazione).

Le equazioni differenziali che governano la dinamica sono:

$$dS/dt = -\beta S I / N \quad dI/dt = \beta S I / N - \gamma I \quad dR/dt = \gamma I$$

dove:

- β è il tasso di contatto efficace (probabilità di trasmissione per contatto $\times$ numero di contatti per giorno)
- γ è il tasso di rimozione ($1/\gamma$ è la durata media dell'infezione)

Il parametro critico è il numero di riproduzione di base:

$$R_0 = \beta / \gamma$$

Se $R_0 > 1$, l'epidemia si diffonde. Se $R_0 < 1$, l'epidemia si estingue spontaneamente.

Durante un assedio, β aumenta a causa del sovraffollamento:

$$\beta_{\text{assedio}} = \beta_{\text{normale}} \times (N/A_{\text{disponibile}}) / (N/A_{\text{normale}})$$

dove A è l'area disponibile. Se la popolazione è concentrata in metà dello spazio normale:

$$\beta_{\text{assedio}} = 2 \beta_{\text{normale}}$$

Questo raddoppia R_0 , potenzialmente trasformando una situazione controllabile ($R_0 < 1$) in un'epidemia esplosiva ($R_0 > 2$).

La frazione finale di popolazione che viene infettata è data dalla soluzione dell'equazione trascendente:

$$R^\infty = N[1 - \exp(-R_0 R^\infty/N)]$$

Per $R_0 = 2,5$ (valore tipico per malattie respiratorie in condizioni di sovraffollamento), la frazione infettata è circa 89% della popolazione. Con tasso di mortalità 10%, questo significa perdita di circa 9% della popolazione totale.

Questi effetti devono essere incorporati nei modelli di logoramento:

$$dN_g/dt = -\mu_{\text{combat}} N_g - \mu_{\text{disease}} I_g - \mu_{\text{starvation}} f(r(t)) N_g$$

dove:

- μ_{combat} è il tasso di perdite dovute al combattimento
- μ_{disease} è il tasso di mortalità per malattia
- $\mu_{\text{starvation}}$ è il tasso di mortalità per fame, funzione delle razioni
- I_g è il numero di soldati infetti

Operazioni di Assedio: Scavo di Tunnel e Mine

Una delle tecniche di assedio più sofisticate era lo scavo di tunnel (sapping) sotto le mura per posizionare cariche esplosive o semplicemente per causare il crollo delle fondamenta. Questo innescava una competizione sotterranea tra assediati che scavavano tunnel di attacco e assediati che tentavano di individuarli e scavavano contro-tunnel (countermining).

La probabilità di intercettare un tunnel nemico dipende da molteplici fattori:

- Profondità del tunnel d
- Sistema di rilevamento acustico dei difensori
- Densità della rete di contro-tunnel

Possiamo modellare questo come processo stocastico. Supponiamo che i difensori mantengano una rete di contro-tunnel con densità spaziale λ (tunnel per metro quadrato). Un tunnel di attacco di lunghezza L e larghezza w "attraversa" un'area $A = L \times w \times 2$ (fattore 2 perché il rilevamento può avvenire dai lati).

Se i contro-tunnel sono distribuiti casualmente secondo un processo di Poisson con intensità λ , la probabilità di incontrare almeno un contro-tunnel è:

$$P(\text{intercetto}) = 1 - \exp(-\lambda A) = 1 - \exp(-2\lambda Lw)$$

Per tunnel lungo $L = 100$ metri, largo $w = 2$ metri, e densità $\lambda = 0,001$ contro-tunnel per m^2 :

$$P(\text{intercetto}) = 1 - \exp(-2 \times 0,001 \times 100 \times 2) = 1 - \exp(-0,4) = 1 - 0,6703 \approx 0,33 = 33\%$$

La probabilità aumenta linearmente con la lunghezza del tunnel (per λA piccolo):

$$P(\text{intercetto}) \approx 2\lambda Lw \text{ per } \lambda Lw \ll 1$$

I difensori possono aumentare λ scavando più contro-tunnel, ma questo richiede lavoro enorme. Il volume di terra da scavare per un contro-tunnel di lunghezza l , sezione s è:

$$V = l \times s$$

Con n contro-tunnel che coprono area A :

$$n = \lambda A$$

Il volume totale scavato è:

$$V_{\text{totale}} = nls = \lambda Als$$

Per $A = 10.000 \text{ m}^2$ (area sotto le mura), $\lambda = 0,001$, $l = 50 \text{ m}$, $s = 4 \text{ m}^2$:

$$V_{\text{totale}} = 0,001 \times 10.000 \times 50 \times 4 = 2.000 \text{ m}^3$$

Questo rappresenta circa 3.000 tonnellate di terra da rimuovere, richiedendo migliaia di ore-uomo di lavoro.

Rilevamento Acustico dei Tunnel

I difensori utilizzavano tecniche acustiche sofisticate per rilevare lo scavo nemico. Il metodo più comune era posizionare ciotole d'acqua o tamburi tesi nei contro-tunnel e osservare le vibrazioni causate dallo scavo nemico.

L'intensità del suono decade con la distanza secondo una legge approssimativamente esponenziale attraverso il terreno:

$$I(r) = I_0 \exp(-\alpha r)$$

dove I_0 è l'intensità alla sorgente, r è la distanza, e α è il coefficiente di attenuazione (tipicamente $\alpha \approx 0,1 - 0,5 \text{ m}^{-1}$ per terreno compatto).

La distanza massima di rilevamento r_{max} si ottiene quando l'intensità scende sotto la soglia di rilevamento I_{min} :

$$I_{\text{min}} = I_0 \exp(-\alpha r_{\text{max}})$$

Risolvendo:

$$r_{\text{max}} = (1/\alpha) \ln(I_0/I_{\text{min}})$$

Per $I_0/I_{\text{min}} = 1.000$ (differenza di 30 dB) e $\alpha = 0,2 \text{ m}^{-1}$:

$$r_{\text{max}} = (1/0,2) \times \ln(1.000) = 5 \times 6,91 \approx 34,5 \text{ metri}$$

Questo definisce un raggio di protezione intorno a ciascun punto di ascolto. Per coprire completamente le fondamenta di un perimetro di lunghezza P , il numero di punti di ascolto necessari è:

$$N_{\text{ascolto}} = P / (2r_{\text{max}})$$

Per $P = 2.000$ metri:

$$N_{\text{ascolto}} = 2.000 / (2 \times 34,5) \approx 29 \text{ punti}$$

Ciascun punto richiede sorveglianza continua, rappresentando carico significativo sulla guarnigione.

Escalade: Matematica dell'Assalto con Scale

L'assalto diretto alle mura mediante scale (escalade) rappresentava il metodo più brutale ma diretto per superare le fortificazioni. Il successo dipendeva criticamente dalla velocità di salita rispetto al tempo di reazione dei difensori.

Consideriamo una scala di altezza H appoggiata alle mura con angolo θ rispetto alla verticale. Un soldato che sale con velocità verticale v_{climb} impiega tempo:

$$t_{\text{climb}} = H / v_{\text{climb}}$$

Per mura alte $H = 10$ metri e velocità di salita $v_{\text{climb}} = 0,5$ m/s (valore realistico per soldato con armatura):

$$t_{\text{climb}} = 10 / 0,5 = 20 \text{ secondi}$$

Durante questi 20 secondi, il soldato è completamente esposto al fuoco dei difensori. Se i difensori sul tratto di mura hanno tempo di reazione $t_{\text{reaction}} = 10$ secondi (tempo per notare la scala, posizionarsi e iniziare a respingerla o colpire gli assalitori), hanno:

$$t_{\text{disponibile}} = t_{\text{climb}} - t_{\text{reaction}} = 20 - 10 = 10 \text{ secondi}$$

Durante questi 10 secondi possono:

- Spingere via la scala (se raggiungibile prima che troppi attaccanti salgano)
- Versare olio bollente o altre sostanze
- Colpire con armi da lancio
- Colpire con armi in mischia chi arriva in cima

La probabilità di successo dell'escalade dipende dal numero di scale simultanee. Se n_{scale} scale sono posizionate simultaneamente e i difensori possono concentrarsi su $k_{\text{max}} < n_{\text{scale}}$ scale alla volta:

$$P(\text{almeno una scala ha successo}) \approx 1 - (P_{\text{failure}})^{(n_{\text{scale}}/k_{\text{max}})}$$

dove P_{failure} è la probabilità che un gruppo di k_{max} scale venga respinto.

Per $n_{\text{scale}} = 100$, $k_{\text{max}} = 10$, $P_{\text{failure}} = 0,9$:

$$P(\text{successo}) = 1 - (0,9)^{(100/10)} = 1 - (0,9)^{10} = 1 - 0,349 \approx 0,651 = 65\%$$

Questo spiega perché gli assalti con scale richiedevano numeri massivi di attaccanti: la probabilità di successo aumenta con il numero di scale, ma il costo in vite umane è proporzionale agli attaccanti impegnati.

Arieti e Resistenza delle Strutture Murarie

L'ariete (battering ram) rappresentava il metodo classico per violare le porte o creare brecce nelle mura. La fisica dell'impatto può essere analizzata attraverso principi di meccanica dei continui e resistenza dei materiali.

Un ariete di massa M che si muove con velocità v ha energia cinetica:

$$E_{\text{ariete}} = (1/2) M v^2$$

Questa energia viene trasferita alla sezione di mura colpita in un impatto che dura tempo Δt . La forza media durante l'impatto è:

$$F_{\text{media}} = \Delta p / \Delta t = M v / \Delta t$$

Per ariete con $M = 2.000 \text{ kg}$, $v = 5 \text{ m/s}$, $\Delta t = 0,1 \text{ s}$:

$$F_{\text{media}} = 2.000 \times 5 / 0,1 = 100.000 \text{ N} = 100 \text{ kN}$$

Questa forza è distribuita su un'area di contatto A_{contatto} (tipicamente poche decine di cm^2), creando pressione:

$$P = F_{\text{media}} / A_{\text{contatto}}$$

Per $A_{\text{contatto}} = 0,01 \text{ m}^2$ (100 cm^2):

$$P = 100.000 / 0,01 = 10.000.000 \text{ Pa} = 10 \text{ MPa}$$

Questa pressione deve essere confrontata con la resistenza a compressione del materiale murario σ_{resist} . Per pietra calcarea di buona qualità, $\sigma_{\text{resist}} \approx 50\text{-}100 \text{ MPa}$. Per mattoni, $\sigma_{\text{resist}} \approx 10\text{-}40 \text{ MPa}$.

La mura cede quando:

$$P > \sigma_{\text{resist}}$$

o quando l'energia cumulativa degli impatti ripetuti supera la capacità di assorbimento della struttura. Il numero di colpi necessari per creare una breccia dipende da:

- Spessore delle mura d
- Qualità della muratura
- Presenza di rinforzi interni
- Condizioni della malta

Un modello semplificato assume che ogni colpo rimuova un volume di materiale V_{rimosso} proporzionale all'energia in eccesso:

$$V_{\text{rimosso}} = k (E_{\text{ariete}} - E_{\text{soglia}})$$

dove k è una costante dipendente dal materiale ed E_{soglia} è l'energia minima per causare danno.

Il volume totale da rimuovere per creare una breccia utilizzabile (alta circa 2-3 metri, larga 2 metri) attraverso mura spesse d metri è:

$$V_{\text{totale}} = 2,5 \times 2 \times d = 5d \text{ m}^3$$

Per $d = 3$ metri: $V_{\text{totale}} = 15 \text{ m}^3 \approx 40$ tonnellate di pietra.

Il numero di colpi richiesti è:

$$n_{\text{colpi}} = V_{\text{totale}} / V_{\text{rimosso}}$$

I documenti storici suggeriscono che arieti potenti richiedevano tipicamente centinaia o migliaia di colpi distribuiti su giorni per creare brecce significative in mura massicce, confermando che questa non era tecnica rapida ma guerra di logoramento prolungata.

Casi Storici, Analisi di Sopravvivenza e Studi Statistici

L'Assedio di Tiro: Alessandro Magno contro l'Impossibile (332 a.C.)

L'assedio di Tiro da parte di Alessandro Magno nel 332 avanti Cristo rappresenta uno dei più straordinari esempi di ingegneria militare e determinazione strategica dell'antichità. La città fenicia di Tiro occupava un'isola fortificata a circa 800 metri dalla costa, con mura alte 45 metri che si ergevano direttamente dal mare. La posizione sembrava inespugnabile: la flotta fenicia controllava le acque circostanti e poteva rifornire indefinitamente la città, mentre qualsiasi tentativo di assalto navale si sarebbe infranto contro le possenti fortificazioni marittime.

Alessandro affrontò questo problema apparentemente irrisolvibile con una soluzione che sfidava ogni convenzione militare: costruì un molo artificiale (moles) attraverso lo stretto braccio di mare, trasformando così l'assedio navale in assedio terrestre. L'opera richiese lavoro titanico. Consideriamo i parametri quantitativi del progetto.

La distanza dalla costa all'isola era $d \approx 800$ metri. La larghezza del molo era $w \approx 60$ metri (necessaria per supportare torri d'assedio). La profondità media dell'acqua cresceva gradualmente dalla costa verso l'isola, raggiungendo profondità massima $h_{\text{max}} \approx 5\text{-}6$ metri. Il volume totale di materiale necessario, approssimando il fondale come piano inclinato, è:

$$V_{\text{molo}} \approx w \times d \times h_{\text{media}} \approx 60 \times 800 \times 3 = 144.000 \text{ m}^3$$

Questo corrisponde a circa 350.000 tonnellate di pietra, terra e legname. Con carri che trasportano circa 500 kg per viaggio:

$$n_{\text{viaggi}} = 350.000.000 / 500 = 700.000 \text{ viaggi}$$

Se ogni viaggio richiede 1 ora (carico, trasporto, scarico), il tempo totale di trasporto è 700.000 ore. Con 1.000 lavoratori che operano 10 ore al giorno:

$$t_{\text{costruzione}} = 700.000 / (1.000 \times 10) = 70 \text{ giorni}$$

Nella realtà, l'assedio durò circa 7 mesi (210 giorni), indicando che i valori stimati sono ragionevoli considerando interruzioni, opposizione nemica e difficoltà tecniche. I Tirii tentarono ripetutamente di distruggere il molo inviando navi incendiarie e compiendo sortite, prolungando significativamente i lavori.

La costruzione del molo modificò anche le correnti marine, causando accumulo di sedimenti che gradualmente ampliarono ulteriormente la connessione terrestre. Questo effetto geomorfologico, non previsto ma favorevole ad Alessandro, illustra come grandi opere militari possano avere conseguenze ambientali durature. Oggi, l'antica isola di Tiro è permanentemente connessa alla terraferma, eredità fisica dell'assedio di Alessandro.

Una volta completato il molo, Alessandro poté portare torri d'assedio (eliopoli) direttamente sotto le mura. Queste torri, alte circa 50 metri per superare le mura di 45 metri, erano strutture di legno rinforzato che ospitavano arcieri e catapulte. Il peso di una tale torre può essere stimato:

$$V_{\text{legname}} \approx 50 \times 10 \times 10 \times 0,1 = 500 \text{ m}^3 \text{ (struttura aperta, non solida)}$$

Con densità del legno $\rho \approx 600 \text{ kg/m}^3$:

$$M_{\text{torre}} \approx 500 \times 600 = 300.000 \text{ kg} = 300 \text{ tonnellate}$$

Spostare questa massa sul molo richiese sistemi elaborati di rulli e argani. La forza necessaria per spostare la torre, considerando attrito $\mu \approx 0,3$:

$$F_{\text{attrito}} = \mu \times M_{\text{torre}} \times g = 0,3 \times 300.000 \times 9,81 \approx 883.000 \text{ N} \approx 880 \text{ kN}$$

Questa forza corrisponde al lavoro di centinaia di uomini o animali da tiro.

L'assedio terminò con la caduta di Tiro dopo che la flotta fenicia fu sconfitta dalle navi fornite ad Alessandro dalle città cipriote. La combinazione di assedio terrestre (molo e torri) e blocco navale ruppe finalmente la capacità di resistenza della città. Il costo umano fu terribile: secondo le fonti antiche, Alessandro fece massacrare 8.000 difensori e vendere come schiavi 30.000 abitanti. Questi numeri, anche se probabilmente esagerati dalle fonti, indicano l'enormità della tragedia umana.

L'Assedio di Costantinopoli: La Fine di un'Era (1453)

L'assedio di Costantinopoli da parte del sultano ottomano Mehmed II nel 1453 segna un punto di svolta nella storia militare: fu il primo grande assedio dove l'artiglieria a polvere da sparo giocò ruolo decisivo, dimostrando definitivamente l'obsolescenza delle fortificazioni medievali tradizionali.

La città di Costantinopoli era protetta dalle mura teodosiane, sistema difensivo triplo costruito nel quinto secolo. La linea principale consisteva in:

- Muro esterno alto 8-9 metri
- Fossato largo 18 metri
- Muro interno alto 12 metri con torri che raggiungevano 18-20 metri
- Spessore del muro interno: 4-5 metri

Questo sistema aveva resistito a innumerevoli assedi per mille anni. Mehmed II portò contro queste difese la più potente artiglieria mai assemblata fino a quel momento, incluso il leggendario cannone gigante di Orban.

Questo cannone aveva caratteristiche straordinarie:

- Lunghezza della canna: $L \approx 8$ metri
- Calibro (diametro interno): $d \approx 76$ cm
- Massa del proiettile: $m \approx 550$ kg
- Massa del cannone: $M \approx 18.000$ kg

La velocità alla bocca può essere stimata dalle leggi della balistica. L'energia della carica di polvere da sparo (circa 70 kg di polvere nera) è:

$$E_{\text{polvere}} \approx 70 \text{ kg} \times 3.000.000 \text{ J/kg} = 210.000.000 \text{ J} = 210 \text{ MJ}$$

Con efficienza di conversione $\eta \approx 0,3$ (tipica per cannoni di quest'epoca):

$$E_{\text{proiettile}} = \eta \times E_{\text{polvere}} = 0,3 \times 210 \text{ MJ} = 63 \text{ MJ}$$

Da $(1/2)mv^2 = E_{\text{proiettile}}$:

$$v = \sqrt{(2 \times E_{\text{proiettile}} / m)} = \sqrt{(2 \times 63.000.000 / 550)} = \sqrt{(229.091)} \approx 479 \text{ m/s}$$

Questa velocità è impressionante anche per standard moderni. L'energia cinetica del proiettile all'impatto (trascurando resistenza dell'aria per semplicità) è:

$$E_{\text{impatto}} = 63 \text{ MJ}$$

Quando questo proiettile colpisce una sezione di mura di area $A \approx 2 \text{ m}^2$, la pressione media è:

$$P = F / A \approx E_{\text{impatto}} / (A \times d_{\text{penetrazione}})$$

Assumendo penetrazione $d_{\text{penetrazione}} \approx 1$ metro nel materiale murario:

$$P \approx 63.000.000 / (2 \times 1) = 31.500.000 \text{ Pa} \approx 31,5 \text{ MPa}$$

Questa pressione supera la resistenza della muratura medievale, causando fratture catastrofiche. Il cannone poteva sparare solo 7 colpi al giorno a causa del tempo necessario per raffreddamento, pulizia, ricarica e il rischio di esplosione se usato troppo intensamente. Durante i 53 giorni di assedio, il grande cannone sparò:

$$n_{\text{colpi_totali}} \approx 53 \times 7 = 371 \text{ colpi}$$

Anche se questo numero sembra limitato, l'effetto cumulativo fu devastante. Ogni colpo rimuoveva diverse tonnellate di muratura, e dopo settimane di bombardamento continuo, ampie sezioni delle mura teodosiane erano ridotte a cumuli di macerie.

L'assedio durò 53 giorni, dal 6 aprile al 29 maggio 1453. Durante questo periodo:

- Gli Ottomani impiegarono circa 80.000-100.000 uomini
- I difensori bizantini erano circa 7.000-8.000 uomini
- Le mura subirono bombardamenti costanti da decine di cannoni
- I difensori riparavano disperatamente le brecce durante la notte

Il rapporto numerico era quindi:

$$r_{\text{numerico}} = N_{\text{attaccanti}} / N_{\text{difensori}} \approx 90.000 / 7.500 \approx 12:1$$

Nonostante questa schiacciante superiorità numerica, l'assedio richiese quasi due mesi. Questo testimonia l'efficacia residua delle fortificazioni e della difesa organizzata, anche contro l'artiglieria moderna.

La caduta di Costantinopoli ebbe conseguenze geopolitiche enormi:

- Fine dell'Impero Bizantino dopo 1.123 anni
- Controllo ottomano degli stretti tra Mar Nero e Mediterraneo
- Accelerazione della ricerca di rotte commerciali alternative verso l'Asia
- Migrazione di studiosi greci in Italia, contribuendo al Rinascimento

Analisi Statistica degli Assedi: Distribuzione delle Durate

Per comprendere i pattern generali degli assedi medievali e rinascimentali, possiamo analizzare statisticamente un dataset di assedi storici ben documentati. Sebbene non abbiamo accesso qui a tale dataset completo, possiamo discutere i metodi di analisi che gli storici militari applicano.

L'analisi di sopravvivenza (survival analysis) è particolarmente appropriata per studiare la durata degli assedi. In questo framework, trattiamo l'assedio come un "tempo fino all'evento" dove l'evento è la capitolazione della città assediata o il ritiro degli assediati.

La funzione di sopravvivenza $S(t)$ rappresenta la probabilità che un assedio duri almeno fino al tempo t :

$$S(t) = P(T \geq t)$$

dove T è la variabile casuale che rappresenta la durata dell'assedio. La funzione di hazard $h(t)$ rappresenta il tasso istantaneo di capitolazione al tempo t , dato che l'assedio è durato fino a t :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t) / \Delta t$$

La relazione tra funzione di sopravvivenza e hazard è:

$$S(t) = \exp(-\int_0^t h(s) ds)$$

Un modello popolare è la distribuzione di Weibull, particolarmente flessibile per modellare tassi di hazard che aumentano o diminuiscono nel tempo:

$$h(t) = (k/\lambda) \times (t/\lambda)^{(k-1)}$$

dove:

- $\lambda > 0$ è il parametro di scala (in giorni)
- $k > 0$ è il parametro di forma

Per $k = 1$, otteniamo hazard costante (distribuzione esponenziale). Per $k > 1$, l'hazard aumenta nel tempo (la probabilità di capitolazione cresce quanto più l'assedio dura). Per $k < 1$, l'hazard diminuisce (effetto di "hardening" dove la città diventa relativamente più resistente quanto più resiste).

Gli assedi storici mostrano tipicamente $k > 1$, riflettendo il fatto che le risorse dei difensori si esauriscono progressivamente. Valori tipici potrebbero essere $k \approx 1,5-2,5$ e $\lambda \approx 60-120$ giorni (mediana della durata).

La funzione di sopravvivenza Weibull è:

$$S(t) = \exp(-(t/\lambda)^k)$$

La mediana della durata (tempo al quale 50% degli assedi sono terminati) è:

$$t_{\text{mediana}} = \lambda \times (\ln 2)^{1/k}$$

Per $\lambda = 90$ giorni, $k = 2$:

$$t_{\text{mediana}} = 90 \times (0,693)^{1/2} = 90 \times 0,833 = 75 \text{ giorni}$$

Il tempo medio è:

$$E[T] = \lambda \times \Gamma(1 + 1/k)$$

dove Γ è la funzione gamma. Per $k = 2$:

$$\Gamma(1,5) = (1/2) \times \sqrt{\pi} \approx 0,886$$

$$E[T] = 90 \times 0,886 \approx 80 \text{ giorni}$$

Fattori Predittivi della Durata degli Assedi

L'analisi di regressione può identificare quali fattori influenzano significativamente la durata degli assedi. Un modello di regressione Cox proporzionale hazards permette di stimare l'effetto di covariate sul tasso di hazard:

$$h(t|X) = h_0(t) \times \exp(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n)$$

dove:

- $h_0(t)$ è l'hazard baseline (senza covariate)
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono le covariate (dimensione guarnigione, scorte, ecc.)
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sono i coefficienti da stimare

Covariate rilevanti potrebbero includere:

- $X_1 = \log(\text{dimensione guarnigione})$
- $X_2 = \log(\text{dimensione esercito assediante})$
- $X_3 = \text{scorte alimentari stimate (mesi)}$
- $X_4 = \text{qualità fortificazioni (scala 1-10)}$
- $X_5 = \text{presenza artiglieria pesante (0/1)}$
- $X_6 = \text{possibilità rinforzi esterni (0/1)}$

Il coefficiente β_i rappresenta il log dell'hazard ratio per incremento unitario di X_i . Se $\beta_1 = -0,5$, questo significa:

$$\exp(-0,5) \approx 0,606$$

quindi un raddoppio della dimensione della guarnigione (incremento di $\log(2) \approx 0,693$ in X_1) riduce l'hazard di:

$$HR = \exp(-0,5 \times 0,693) = \exp(-0,347) \approx 0,707 \approx 71\%$$

La guarnigione maggiore riduce il rischio di capitolazione del 29%.

Distribuzione Geografica e Temporale degli Assedi

L'analisi spaziotemporale degli assedi rivela pattern interessanti. Durante periodi di intensa attività militare (Guerra dei Cent'anni, Guerre d'Italia del Rinascimento, Guerra dei Trent'anni), la frequenza degli assedi aumenta drammaticamente.

Possiamo modellare il numero di assedi per anno come processo di Poisson:

$$P(N = n) = (\lambda^n \times \exp(-\lambda)) / n!$$

dove λ è il tasso medio di assedi per anno. Durante periodi di pace relativa, $\lambda \approx 2-5$ assedi/anno in Europa. Durante guerre maggiori, $\lambda \approx 20-40$ assedi/anno.

La distribuzione geografica mostra concentrazione lungo frontiere contestate e regioni di importanza strategica:

- Valle del Reno (confine Francia-Germania)
- Pianura padana (Italia settentrionale)
- Fiandre (regione commercialmente ricca)
- Confine ottomano-asburgico (Balcani, Ungheria)

L'analisi cluster spaziale può identificare questi hotspot usando tecniche come la funzione K di Ripley o scan statistics spaziali. La densità di assedi $p(x,y)$ come funzione della posizione geografica (x,y) può essere stimata mediante kernel density estimation:

$$p(x,y) = (1/n) \times \sum_i K_h(\sqrt{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]})$$

dove K_h è una funzione kernel (tipicamente gaussiana) con bandwidth h , e (x_i, y_i) sono le posizioni degli n assedi osservati.

Costi Economici degli Assedi

Gli assedi imponevano costi economici staggering a entrambe le parti. Per l'assediente, i costi principali erano:

- Pagamento delle truppe: circa 1-3 ducati/soldato/mese
- Costruzione di opere d'assedio
- Munizioni e polvere da sparo
- Rifornimenti alimentari
- Costo opportunità (truppe immobilizzate)

Per un esercito di 20.000 uomini che assedia per 3 mesi con costo medio 2 ducati/soldato/mese:

$$C_{\text{pagamento}} = 20.000 \times 2 \times 3 = 120.000 \text{ ducati}$$

Aggiungendo altri costi (opere, munizioni, rifornimenti), il costo totale poteva facilmente raggiungere 200.000-300.000 ducati, equivalente al PIL annuale di una piccola città-stato.

Per l'assedato, i costi includevano:

- Perdita di commercio e produzione economica
- Consumo delle scorte accumulate
- Danneggiamento delle infrastrutture
- Perdite umane (militari e civili)
- Costo delle riparazioni post-assedio

Il valore attuale netto (NPV) di un assedio dal punto di vista dell'assediente è:

$$NPV = -C_{\text{assedio}} + P_{\text{successo}} \times V_{\text{conquista}} - (1 - P_{\text{successo}}) \times C_{\text{fallimento}}$$

dove:

- C_{assedio} è il costo dell'assedio
- P_{successo} è la probabilità di successo
- $V_{\text{conquista}}$ è il valore della città conquistata (saccheggio, controllo strategico, ecc.)
- $C_{\text{fallimento}}$ è il costo addizionale di un assedio fallito (perdita di prestigio, vulnerabilità militare)

Un comandante razionale dovrebbe intraprendere l'assedio solo se $NPV > 0$. Questo framework decisionale spiega perché molti assedi terminavano con negoziazioni piuttosto che assalti finali: se entrambe le parti riconoscevano che i costi attesi superavano i benefici, la resa negoziata era razionalmente preferibile al prolungamento del conflitto.

Game Theory degli Assedi e Equilibri Strategici

Formulazione della Guerra d'Assedio come Gioco Strategico

La guerra d'assedio può essere modellata naturalmente come gioco sequenziale a informazione imperfetta tra due giocatori: l'assediente (A) e l'assedato (D, da defender). La struttura temporale tipica è:

1. **Fase di Preparazione:** Il difensore costruisce fortificazioni, accumula scorte, prepara la guarnigione (decisioni prese anni o decenni prima dell'assedio effettivo)
2. **Inizio dell'Assedio:** L'assediente decide se attaccare e con quale forza
3. **Fase Dinamica:** Durante l'assedio, entrambi i giocatori fanno scelte continue su allocazione delle risorse, intensità degli sforzi, timing delle sortite/assalti
4. **Risoluzione:** L'assedio termina con vittoria dell'assediente, ritiro dell'assediente, o negoziazione

Questa struttura suggerisce un gioco di Stackelberg, dove il difensore è il leader che muove per primo (costruisce fortificazioni) e l'assediente è il follower che osserva le fortificazioni e poi decide la propria strategia.

Modello di Stackelberg delle Fortificazioni

Nel modello base, il difensore sceglie livello di fortificazione $f \in [f_{\min}, f_{\max}]$ a costo $C_D(f)$, dove $C_D(f)$ è crescente e convessa (costi marginali crescenti). L'assediente osserva f e sceglie livello di effort militare $e \in [e_{\min}, e_{\max}]$ a costo $C_A(e)$.

La probabilità che l'assediente conquisti la città è funzione di f ed e :

$$P(\text{conquista} \mid f, e) = p(e, f)$$

dove p è crescente in e (più sforzo aumenta probabilità di successo) e decrescente in f (migliori fortificazioni riducono probabilità di successo dell'attaccante).

Una forma funzionale specifica potrebbe essere:

$$p(e, f) = e^\alpha / (e^\alpha + f^\beta)$$

dove $\alpha, \beta > 0$ sono parametri che catturano l'elasticità della probabilità di successo rispetto a sforzo militare e fortificazioni.

Il payoff dell'assediente è:

$$U_A(e, f) = p(e, f) \times V - C_A(e)$$

dove V è il valore della città conquistata. Il payoff del difensore è:

$$U_D(f, e) = [1 - p(e, f)] \times V_D - C_D(f)$$

dove V_D è il valore che il difensore attribuisce a mantenere controllo della città.

Il gioco si risolve per backward induction. Nella seconda fase, l'assediente sceglie e per massimizzare U_A dato f :

$$\max_e U_A(e, f) = p(e, f) \times V - C_A(e)$$

La condizione del primo ordine è:

$$\partial p / \partial e \times V = \partial C_A / \partial e$$

Questo definisce la funzione di best response dell'assediante:

$$e^*(f) = \operatorname{argmax}_e U_A(e, f)$$

Nella prima fase, il difensore anticipa questa risposta e sceglie f per massimizzare:

$$\max_f U_D(f, e^*(f)) = [1 - p(e^*(f), f)] \times V_D - C_D(f)$$

La condizione del primo ordine incorpora l'effetto indiretto attraverso $e^*(f)$:

$$\partial p / \partial f \times (\partial e^* / \partial f) \times V_D + \partial p / \partial f \times V_D = \partial C_D / \partial f$$

Questo è l'equilibrio di Stackelberg. Il difensore costruisce fortificazioni tenendo conto che fortificazioni più forti indurranno l'assediante a ridurre il proprio sforzo militare (se $\partial e^* / \partial f < 0$).

Esempio Numerico: Calcolo dell'Equilibrio

Consideriamo una parametrizzazione specifica:

$$p(e, f) = e^2 / (e^2 + f^2)$$

$$C_A(e) = c_A \times e^2 \quad C_D(f) = c_D \times f^2$$

$$\text{con } V = 100, V_D = 150, c_A = 1, c_D = 0,5.$$

La best response dell'assediante si ottiene da:

$$\partial U_A / \partial e = [2e \times (e^2 + f^2) - e^2 \times 2e] / (e^2 + f^2)^2 \times V - 2c_A e = 0$$

Semplificando:

$$2e f^2 / (e^2 + f^2)^2 \times V = 2c_A e$$

$$f^2 V / (e^2 + f^2)^2 = c_A$$

Per la nostra parametrizzazione:

$$f^2 \times 100 / (e^2 + f^2)^2 = 1$$

Risolvendo numericamente per diversi valori di f , possiamo tracciare $e^*(f)$.

Alternativamente, manipolando:

$$(e^2 + f^2)^2 = 100 f^2$$

Prendendo radice:

$$e^2 + f^2 = 10 f \quad (\text{assumendo radice positiva})$$

$$e^2 = 10f - f^2 = f(10 - f)$$

$$e^*(f) = \sqrt{f(10 - f)}$$

Questa funzione è definita per $0 \leq f \leq 10$ e ha massimo a $f = 5$ dove $e^* = 5$.

Ora il difensore massimizza:

$$U_D(f) = [1 - p(e^*(f), f)] \times 150 - 0,5 f^2$$

Sostituendo $e^*(f)$ e p :

$$p(e^*(f), f) = f(10-f) / [f(10-f) + f^2] = (10f - f^2) / (10f) = 1 - f/10$$

Quindi:

$$U_D(f) = [1 - (1 - f/10)] \times 150 - 0,5 f^2 = (f/10) \times 150 - 0,5 f^2 = 15f - 0,5f^2$$

Massimizzando:

$$dU_D/df = 15 - f = 0$$

$$f^* = 15$$

Ma $e^*(15) = \sqrt{[15(10-15)]} = \sqrt{[-75]}$ non è definito! Questo indica che per $f > 10$, l'assediante sceglierebbe $e^* = 0$ (non attaccare).

Quindi dobbiamo considerare vincolo $f \leq 10$. Al boundary $f = 10$:

$$U_D(10) = 15 \times 10 - 0,5 \times 100 = 150 - 50 = 100$$

Il difensore ottimale costruisce $f^* = 10$, inducendo $e^* = 0$. In questo equilibrio, le fortificazioni sono così forti che l'assediante sceglie razionalmente di non attaccare.

Questo esempio illustra un principio generale della deterrenza: fortificazioni sufficientemente forti possono rendere l'attacco non redditizio, prevenendo completamente l'assedio.

Nash Equilibrium in Giochi Simultanei

Se modelliamo l'assedio come gioco simultaneo (entrambi scelgono strategie senza osservare la scelta dell'avversario), cerchiamo equilibri di Nash dove nessun giocatore ha incentivo a deviare unilateralmente.

Consideriamo un gioco semplificato dove assediante e assediato scelgono simultaneamente intensità di sforzo $a_A, a_D \in [0, 1]$. La probabilità di successo dell'assediante è:

$$p(a_A, a_D) = a_A / (a_A + a_D)$$

I payoff sono:

$$U_A(a_A, a_D) = p(a_A, a_D) \times V - c_A a_A^2 \quad U_D(a_A, a_D) = [1 - p(a_A, a_D)] \times V - c_D a_D^2$$

Le condizioni del primo ordine per equilibrio di Nash sono:

$$\partial U_A / \partial a_A = [a_D / (a_A + a_D)^2] \times V - 2c_A a_A = 0 \quad \partial U_D / \partial a_D = [a_A / (a_A + a_D)^2] \times V - 2c_D a_D = 0$$

Dalla prima equazione:

$$a_D V = 2c_A a_A (a_A + a_D)^2$$

Dalla seconda:

$$a_A V = 2c_D a_D (a_A + a_D)^2$$

Dividendo la prima per la seconda:

$$a_D / a_A = c_A a_A / (c_D a_D)$$

$$a_D^2 / a_A^2 = c_A / c_D$$

$$a_D / a_A = \sqrt{c_A / c_D}$$

Se $c_A = c_D$ (costi simmetrici), allora $a_D = a_A$ nell'equilibrio. Se $c_A > c_D$ (assediente ha costi maggiori), allora $a_D > a_A$ (difensore investe più).

Sostituendo $a_D = a_A$ nella condizione del primo ordine:

$$a_A V = 2c_A a_A (2a_A)^2$$

$$V = 8c_A a_A^2$$

$$a_A^* = \sqrt{V / (8c_A)}$$

Per $V = 100$, $c_A = 1$:

$$a_A^* = \sqrt{(100/8)} = \sqrt{12,5} \approx 3,54$$

Ma abbiamo vincolato $a_A \in [0,1]$, quindi la soluzione interior non è valida. In questo caso, l'equilibrio è al boundary con entrambi che scelgono massimo sforzo $a_A = a_D = 1$.

Giochi Ripetuti e Reputazione

Quando lo stesso assediante e difensore interagiscono ripetutamente (ad esempio, durante una guerra prolungata con multipli assedi), emergono considerazioni reputazionali che influenzano le strategie.

Un assediante con reputazione di condurre assedi brutali e massacrare le popolazioni delle città che resistono può indurre città future a capitolare più rapidamente. Questo crea incentivo a investire in costruzione della reputazione attraverso azioni severe nelle prime fasi.

Modelliamo questo come gioco ripetuto infinitamente (o finitamente ma con orizzonte lungo). In ogni periodo $t = 1, 2, 3, \dots$, una nuova città decide se resistere (R) o arrendersi (S). Se la città resiste, subisce costi di assedio c_{siege} e probabilità p di essere conquistata e subire

costo addizionale c_{massacre} . Se si arrende immediatamente, paga costo $c_{\text{surrender}} < c_{\text{siege}}$.

L'assediente, dopo aver conquistato una città che ha resistito, sceglie se massacrare (M) o essere clemente (C). Il massacro costa k all'assediente ma aumenta la probabilità che future città si arrendano.

Sia $r_t \in [0,1]$ la reputazione dell'assediente per brutalità al tempo t . La città crede che l'assediente massacrerà con probabilità r_t . L'utilità attesa della città se resiste è:

$$U_{\text{resist}} = -c_{\text{siege}} - p \times r_t \times c_{\text{massacre}}$$

L'utilità se si arrende è:

$$U_{\text{surrender}} = -c_{\text{surrender}}$$

La città resiste se $U_{\text{resist}} > U_{\text{surrender}}$:

$$-c_{\text{siege}} - p r_t c_{\text{massacre}} > -c_{\text{surrender}}$$

$$r_t < (c_{\text{surrender}} - c_{\text{siege}}) / (p c_{\text{massacre}})$$

Definendo soglia critica:

$$\bar{r} = (c_{\text{surrender}} - c_{\text{siege}}) / (p c_{\text{massacre}})$$

la città si arrende se $r_t > \bar{r}$, resiste se $r_t < \bar{r}$.

L'assediente aggiorna la reputazione attraverso le proprie azioni. Un modello semplice di aggiornamento bayesiano:

Se l'assediente massakra: $r_{t+1} = \min\{r_t + \Delta r, 1\}$ Se l'assediente è clemente: $r_{t+1} = \max\{r_t - \delta r, 0\}$

dove $\Delta r > \delta r$ riflette l'asimmetria: è più facile guadagnare reputazione di brutalità che perderla.

L'assediente risolve problema di controllo ottimale scegliendo sequenza di azioni per massimizzare payoff totale scontato:

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \pi_t$$

dove $\beta \in (0,1)$ è fattore di sconto e π_t è il payoff al periodo t .

In equilibrio, l'assediente potrebbe scegliere strategia di tipo "tit-for-tat": massacrare le prime città che resistono per costruire reputazione, poi diventare più clemente una volta che la reputazione è sufficientemente alta da indurre arrese rapide.

War of Attrition: Resistenza Prolungata

Il modello di "war of attrition" è particolarmente appropriato per assedi lunghi dove entrambe le parti accumulano costi nel tempo e chi abbandona per primo perde.

In questo gioco, due giocatori scelgono simultaneamente quando "abbandonare" (tempi t_A per assediante, t_D per difensore). Chi abbandona per primo perde, l'altro vince. Entrambi pagano costi proporzionali al tempo che rimangono nel gioco.

I payoff sono:

- Se $t_A < t_D$: $U_A = -c_A t_A$, $U_D = V_D - c_D t_A$
- Se $t_D < t_A$: $U_A = V_A - c_A t_D$, $U_D = -c_D t_D$
- Se $t_A = t_D$: $U_A = U_D = 0$ (risultato nullo con probabilità)

dove c_A , c_D sono tassi di costo per unità di tempo, V_A , V_D sono i valori della vittoria.

In equilibrio di Nash in strategie miste, i giocatori randomizzano sui tempi di abbandono secondo distribuzioni di probabilità $F_A(t)$, $F_D(t)$. L'equilibrio simmetrico (se $c_A = c$ e $V_A = V_D = V$) ha:

$$F(t) = 1 - \exp(-ct/V)$$

La durata attesa dell'assedio è:

$$E[\min(t_A, t_D)] = V/(2c)$$

Questo mostra che assedi durano più a lungo quando:

- Il valore della vittoria V è alto (posta in gioco maggiore)
- I costi di permanenza c sono bassi (assedio è sostenibile economicamente)

Per $V = 100.000$ ducati, $c = 1.000$ ducati/giorno:

$$E[\text{durata}] = 100.000 / (2 \times 1.000) = 50 \text{ giorni}$$

Bargaining durante gli Assedi: Il Modello di Rubinstein

Molti assedi terminavano con negoziazioni piuttosto che vittoria militare completa. Il modello di bargaining sequenziale di Rubinstein può illuminare le dinamiche di queste negoziazioni.

Assediante e assediato negoziano la divisione di un "surplus" di valore S (che rappresenta i costi evitati se l'assedio termina ora piuttosto che continuare fino alla conclusione militare). In ogni periodo, un giocatore propone una divisione (x_A, x_D) con $x_A + x_D = S$, e l'altro accetta o rifiuta. Se rifiuta, il gioco continua al periodo successivo con surplus ridotto a δS (dove $\delta < 1$ rappresenta il deterioramento del valore dovuto ai costi continui dell'assedio).

Nel gioco infinito ripetuto, esiste unico equilibrio perfetto nei sottogiochi dove la divisione è:

$$x_A^* = S \times [1 / (1 + \delta)] \quad x_D^* = S \times [\delta / (1 + \delta)]$$

Se l'assediante propone per primo, ottiene quota maggiore. Per $\delta = 0,9$:

$$x_{A^*} = S / 1,9 \approx 0,526 S \quad x_{D^*} = 0,9S / 1,9 \approx 0,474 S$$

L'assediente ottiene circa 52,6% del surplus totale semplicemente per il vantaggio di muovere per primo. Se invece il difensore propone per primo, i ruoli si invertono.

Questo spiega l'importanza del timing nelle negoziazioni di assedio: chi è in posizione di forza per fare la prima offerta credibile ottiene vantaggio significativo.

Il fattore di sconto δ cattura la pazienza relativa delle parti. Se l'assediente ha costi maggiori (brucia risorse più velocemente), ha $\delta_A < \delta_D$, risultando in minore potere negoziale. Se il difensore sta esaurendo le scorte rapidamente, ha $\delta_D < \delta_A$, risultando in posizione negoziale più debole.

Informazione Imperfetta e Bluff

Nella realtà, assediante e assediato hanno informazione imperfetta sulle risorse e determinazione dell'avversario. Questo crea opportunità per bluff e disinformazione strategica.

Il difensore può beneficiare facendo credere all'assediente che le scorte alimentari sono più abbondanti di quanto realmente sono, o che la guarnigione è più forte. L'assediente può beneficiare esagerando la propria forza militare per indurre resa rapida.

Modelliamo questo come gioco bayesiano. Il difensore ha scorte private $S \in \{S_{\text{basso}}, S_{\text{alto}}\}$ con probabilità prior $P(S_{\text{alto}}) = p$. L'assediente non osserva S ma osserva un segnale imperfetto $\sigma \in \{\sigma_{\text{basso}}, \sigma_{\text{alto}}\}$ con:

$$P(\sigma_{\text{alto}} | S_{\text{alto}}) = q \quad P(\sigma_{\text{alto}} | S_{\text{basso}}) = r$$

dove $q > r$ (segnale è informativo ma non perfetto).

Dopo aver osservato σ , l'assediente aggiorna beliefs usando regola di Bayes:

$$P(S_{\text{alto}} | \sigma_{\text{alto}}) = [q \times p] / [q \times p + r \times (1-p)]$$

Per $p = 0,5$, $q = 0,8$, $r = 0,2$:

$$P(S_{\text{alto}} | \sigma_{\text{alto}}) = [0,8 \times 0,5] / [0,8 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5] = 0,4 / 0,5 = 0,8$$

Osservando segnale "alto", l'assediente aggiorna credenza da 50% a 80% che il difensore abbia scorte abbondanti.

Questo influenza la decisione dell'assediente di continuare l'assedio o negoziare. Se il costo atteso dell'assedio contro difensore con scorte alte supera il valore della conquista, l'assediente potrebbe scegliere di ritirarsi o offrire termini generosi.

Il difensore, conoscendo questo, ha incentivo a investire in segnali che suggeriscono forza anche quando è debole. Storicamente, questo includeva tattiche come:

- Sortite aggressive per dimostrare vigore della guarnigione

- Illuminare molte torce di notte per suggerire popolazione grande
- Gettare cibo dalle mura per suggerire abbondanza (anche se le scorte sono criticamente basse)
- Mostrare attività frenetica di riparazione per suggerire abbondanza di materiali e manodopera

L'equilibrio in questi giochi di segnalazione spesso coinvolge "separating equilibria" dove tipi diversi di difensori scelgono azioni diverse, permettendo all'assediente di inferire il tipo, o "pooling equilibria" dove tutti i tipi scelgono la stessa azione, mantenendo l'incertezza.

Commitment Problems e Credibilità

Un problema fondamentale negli assedi è quello del commitment: come può l'assediente promettere credibilmente di trattare con clemenza una città che si arrende?

Se le città credono che l'assediente massacrerà la popolazione anche dopo la resa, non hanno incentivo ad arrendersi e combatteranno disperatamente fino alla fine. Ma questa resistenza feroce impone costi enormi all'assediente.

L'assediente beneficerebbe da capacità di commitment credibile a termini generosi per indurre arrese rapide. Ma come può rendere credibile questo commitment?

Meccanismi di commitment includono:

1. **Reputazione:** Costruire track record di clemenza in assedi precedenti
2. **Costi di reneging:** Creare costi politici o economici per violare i termini
3. **Third-party enforcement:** Coinvolgere potenze neutrali che garantiscono i termini
4. **Ostacoli autoimposti:** Limitare deliberatamente le proprie opzioni future

Un modello formale considera due periodi. Nel periodo 1, la città sceglie se arrendersi (S) o resistere (R). Nel periodo 2, se la città si è arresa, l'assediente sceglie se onorare i termini (H) o tradire (T).

I payoff sono:

- (S, H): Città: $-c_{\text{surrender}}$, Assediante: v_{quick}
- (S, T): Città: $-c_{\text{surrender}} - c_{\text{massacre}}$, Assediante: $v_{\text{quick}} + v_{\text{massacre}}$
- (R, vittoria assediante): Città: $-c_{\text{siege}}$, Assediante: $v_{\text{siege}} - c_{\text{siege}}$

dove v_{massacre} è il beneficio di breve termine del tradimento (saccheggio) ma c'è costo reputazionale futuro r .

Se l'assediente è miope (non considera effetti reputazionali), ha incentivo a tradire: $v_{\text{quick}} + v_{\text{massacre}} > v_{\text{quick}}$. Prevedendo questo, la città non si arrende mai.

Se l'assediente è lungimirante e affronta assedi futuri, il valore della reputazione può cambiare i calcoli:

Valore di onorare = $v_{\text{quick}} + \sum_{t=\text{futuro}} \beta^t \times [v_{\text{quick}}(\text{reputazione buona}) - v_{\text{siege}}(\text{reputazione cattiva})]$

Se questo supera $v_{\text{quick}} + v_{\text{massacre}}$, l'assediente trova ottimale onorare i termini, rendendo credibile il commitment e inducendo la città ad arrendersi.

Questo spiega perché comandanti con lunghi orizzonti temporali e molteplici assedi pianificati beneficiavano dal trattare le prime città con relativa clemenza, costruendo reputazione che facilitava conquiste future.

Sintesi Interdisciplinare e Conclusioni

L'Architettura Militare come Scienza Integrata

Il nostro viaggio attraverso la matematica delle fortificazioni e degli assedi ha rivelato come l'architettura militare rappresenti una sintesi straordinaria di molteplici discipline scientifiche e tecniche. Non si tratta semplicemente di costruire mura più alte o più spesse, ma di ottimizzare sistemi complessi sotto vincoli multipli e contrastanti, in un contesto dove l'avversario è attivo e adattativo.

Abbiamo esplorato come:

La geometria pura fornisce i limiti teorici fondamentali: il problema isoperimetrico dimostra che il cerchio minimizza il perimetro per area data, ma le realtà topografiche, urbanistiche e tattiche richiedono deviazioni da questo ideale matematico. Il quadrato emerge come compromesso pratico tra efficienza geometrica e pianificazione urbana, mentre la trace italienne con i suoi bastioni angolari rappresenta l'evoluzione ulteriore guidata dalle necessità del fuoco incrociato.

La teoria dei grafi traduce la complessità tridimensionale delle fortificazioni in modelli astratti dove nodi rappresentano bastioni e archi rappresentano relazioni di copertura. Problemi di set covering e vertex cover catturano l'essenza dell'ottimizzazione difensiva: come coprire tutto il perimetro con il minimo numero di punti fortificati, garantendo ridondanza contro i guasti.

La programmazione lineare intera permette di formulare rigorosamente questi problemi di ottimizzazione, includendo vincoli complessi su budget, connettività, interdipendenze strutturali. Sebbene NP-completi in generale, algoritmi di approssimazione e euristiche forniscono soluzioni pratiche con garanzie di qualità quantificabili.

La fisica balistica governa l'efficacia dell'artiglieria e delle armi da lancio. Le equazioni del moto parabolico determinano gittate, traiettorie ottimali, energie di impatto. La comprensione profonda di questi principi permise agli ingegneri militari di progettare glacis con angolazioni precise per massimizzare l'esposizione degli attaccanti, e bastioni con spessori calcolati per assorbire l'energia dei proiettili.

L'analisi di sopravvivenza e la statistica offrono strumenti per comprendere i pattern storici degli assedi. Le distribuzioni di Weibull catturano come la probabilità di capitolazione evolve nel tempo in funzione del logoramento delle risorse. I modelli di regressione identificano quali fattori (dimensione della guarnigione, scorte, qualità delle fortificazioni, presenza di artiglieria) predicono significativamente la durata e l'esito degli assedi.

La teoria dei giochi illumina la dimensione strategica: assedi come giochi di Stackelberg dove il difensore muove per primo costruendo fortificazioni e l'assediente risponde ottimalmente; equilibri di Nash dove entrambe le parti scelgono intensità di sforzo ottimali date le scelte dell'avversario; war of attrition che modella la resistenza prolungata; bargaining sequenziale che spiega le negoziazioni durante gli assedi; giochi bayesiani con informazione imperfetta che incorporano bluff, segnalazione e disinformazione strategica.

Lezioni Universali dall'Architettura Militare

Al di là del contesto storico specifico, l'analisi matematica delle fortificazioni offre lezioni che trascendono l'ambito militare e hanno applicabilità a problemi contemporanei di ottimizzazione e design di sistemi complessi.

Il principio del compromesso ottimale: La soluzione matematicamente ottimale secondo un singolo criterio (minimizzazione del perimetro) è spesso impraticabile quando si considerano vincoli multipli e obiettivi contrastanti. Le fortificazioni reali rappresentano compromessi sofisticati tra efficienza geometrica, adattamento topografico, vincoli costruttivi, esigenze urbanistiche e principi tattici. Questo è paradigmatico di problemi di ingegneria moderna dove l'ottimizzazione multi-obiettivo richiede bilanciamento tra performance, costo, affidabilità, manutenibilità e altri fattori.

L'importanza della ridondanza: Il principio che ogni tratto di mura deve essere coperto da almeno due bastioni non è semplice precauzione, ma necessità geometrica per eliminare zone morte e creare fuoco incrociato. In sistemi moderni, la ridondanza è similmente cruciale: sistemi critici (reti di comunicazione, infrastrutture energetiche, sistemi di controllo) richiedono ridondanza per garantire resilienza a guasti e attacchi. La teoria dei grafi fornisce strumenti per quantificare e ottimizzare questa ridondanza.

L'asimmetria difensore-attaccante: Le fortificazioni creano asimmetrie fondamentali che favoriscono i difensori. Geometricamente, la defilata protegge i difensori mentre il glacis espone gli attaccanti. Tatticamente, i difensori operano da posizioni preparate mentre gli attaccanti devono avanzare su terreno ostile sotto fuoco. Economicamente, costruire fortificazioni richiede investimento iniziale ma riduce drasticamente i costi di difesa successiva. Strategicamente, il difensore può attendere che fattori esterni (malattie, carenze di rifornimenti, intervento di alleati) indeboliscano l'assediente. Questa asimmetria ha analoghi in cybersecurity moderna, dove i difensori costruiscono perimetri difensivi (firewall, sistemi di rilevamento intrusioni) che cambiano radicalmente l'economia dell'attacco.

L'evoluzione tecnologica e l'obsolescenza strategica: L'avvento dell'artiglieria a polvere da sparo rese obsolete in pochi decenni le fortificazioni verticali che avevano dominato per un millennio. La trincea italiana rappresentò la risposta adattativa: bastioni bassi e massicci, geometrie angolari per fuoco incrociato. Ma anche questa fu eventualmente superata dall'artiglieria sempre più potente del diciottesimo e diciannovesimo secolo, portando all'era delle fortificazioni permanenti in cemento armato (come la Linea Maginot) e infine alla loro obsolescenza con l'avvento dell'aviazione militare. Questo pattern di innovazione tecnologica che destabilizza equilibri strategici esistenti e richiede radicale riconfigurazione è universale: le rivoluzioni digitali moderne creano similmente cicli di costruzione e obsolescenza di infrastrutture di sicurezza.

La centralità dell'informazione: Abbiamo visto come l'informazione imperfetta durante gli assedi creasse opportunità per bluff, segnalazione, disinformazione. I difensori occultavano lo stato reale delle scorte e della forza della guarnigione. Gli assediati cercavano di intercettare tunnel nemici mediante rilevamento acustico. L'intelligence su posizioni nemiche, piani di attacco, arrivo di rinforzi era cruciale per entrambe le parti. Nella guerra moderna e nella competizione strategica contemporanea, l'informazione è similmente centrale: la cybersecurity, la crittografia, l'intelligence sono i bastioni moderni.

La Matematica come Linguaggio Universale della Strategia

Forse la lezione più profonda è che la matematica non è semplicemente strumento di calcolo, ma linguaggio che rivela strutture universali sottostanti a problemi apparentemente diversi. Le equazioni differenziali che modellano il logoramento delle scorte durante un assedio medievale hanno la stessa forma di quelle che modellano il deplezione di risorse in supply chains moderne. I problemi di ottimizzazione combinatoria dell'allocazione di bastioni sono isomorfi a problemi di allocazione di sensori in reti di sorveglianza o di posizionamento di torri cellulari. I giochi strategici tra assediati e assediati hanno la stessa struttura matematica di giochi tra attaccanti e difensori in cybersecurity, o tra imprese in competizione oligopolistica.

Questa universalità della matematica permette transfer di conoscenza tra domini. Tecniche sviluppate per problemi militari storici (programmazione lineare, teoria dei giochi, analisi di sopravvivenza) trovano applicazione in economia, ingegneria, biologia, scienze sociali. Viceversa, sviluppi matematici contemporanei in machine learning, teoria delle reti complesse, analisi di big data, possono gettare nuova luce su eventi storici quando applicati a dataset di assedi, battaglie, campagne militari.

Verso una Storia Quantitativa della Guerra

Il nostro trattato suggerisce direzioni promettenti per ricerca futura. La disponibilità crescente di dataset storici digitalizzati e strumenti computazionali potenti permette analisi quantitative su scala prima impossibile. Possiamo costruire database di migliaia di assedi con informazioni su durata, esito, caratteristiche delle fortificazioni, dimensione degli eserciti, condizioni ambientali, fattori politici. Applicando metodi statistici moderni (machine learning, analisi causale, network analysis), possiamo testare ipotesi storiche con rigore quantitativo:

- Quale era l'effetto causale della presenza di artiglieria pesante sulla durata degli assedi, controllando per altri fattori?
- Come cambiò l'efficacia relativa delle fortificazioni nel tempo con l'evoluzione tecnologica?
- Quali network di alleanze facilitavano interventi di soccorso che spezzavano gli assedi?
- Come influenzavano fattori ambientali (stagione, clima, malattie) la probabilità di successo degli assedi?

Inoltre, simulazioni computazionali possono esplorare controfattuali storici: cosa sarebbe accaduto se Costantinopoli avesse adottato fortificazioni alla moderna invece delle mura

teodosiane? Quanto più a lungo avrebbe resistito? Queste simulazioni non sono semplice speculazione ma esperimenti controllati in modelli matematici calibrati su dati storici reali.

L'Eredità Intellettuale delle Fortificazioni

Quando oggi visitiamo le rovine di antiche fortezze, dovremmo vedere non solo pietre ammassate, ma soluzioni sofisticate a problemi di ottimizzazione rigorosa. Ogni angolo di bastione, ogni spessore di muro, ogni profilo di glacis, incorpora conoscenza accumulata attraverso secoli di esperienza, raffinata attraverso tragici esperimenti sul campo di battaglia.

Gli architetti militari del Rinascimento erano matematici applicati della più alta calibra, sebbene raramente formalizzassero le loro intuizioni con notazione simbolica moderna. Maestri come Vauban in Francia, che progettò oltre trecento fortificazioni, possedevano comprensione implicita profonda di principi di ottimizzazione, teoria dei giochi, probabilità, che solo secoli dopo sarebbero stati formalizzati rigorosamente.

Le fortificazioni rappresentano, in questo senso, "matematica congelata": incarnazioni tangibili di principi astratti in pietra, terra e ingegneria. Studiarle matematicamente non è anacronistico ma rivela la struttura logica che guidò la loro creazione, una struttura che trascende il contesto storico specifico e illumina principi universali di design, strategia e ottimizzazione.

Riflessioni Finali: Le Muraglie Cosmiche

Il titolo del nostro trattato, "Muraglie Cosmiche", evoca l'idea che le fortificazioni umane partecipano di ordine matematico che pervade l'universo. Le stesse leggi che governano le orbite dei pianeti, la propagazione delle onde, l'evoluzione dei sistemi complessi, si manifestano nella geometria dei bastioni e nella dinamica degli assedi.

Quando Alessandro Magno costruì il molo verso Tiro, quando Mehmed II assemblò il suo colossale cannone, quando gli architetti del Rinascimento disegnarono i bastioni stellati, stavano tutti, consciamente o meno, risolvendo equazioni. Non equazioni scritte con simboli su carta, ma equazioni incarnate in decisioni, scelte, progetti che dovevano bilanciare vincoli multipli e ottimizzare obiettivi contrastanti sotto pressione estrema della competizione mortale.

La matematica non era strumento ausiliario ma essenza stessa del problema. Comprendere le fortificazioni attraverso la matematica non è semplicemente applicare framework moderni a oggetti antichi, ma riconoscere che la razionalità matematica era sempre presente, implicita nella struttura degli artefatti e delle strategie, attendendo solo di essere resa esplicita attraverso formalizzazione rigorosa.

In questo senso, ogni fortificazione è testimonianza della capacità umana di confrontarsi con complessità schiacciante – vincoli geometrici, fisici, economici, strategici, tutti intrecciati in una rete di interdipendenze – e trovare soluzioni che, sebbene imperfette rispetto a ideali matematici astratti, rappresentano compromessi brillanti che permettevano sopravvivenza e prosperità in mondo ostile.

Le muraglie sono cosmiche non perché perfette ma perché umane: incarnano la perenne tensione tra l'ideale e il possibile, tra la teoria pura e la pratica vincolata, tra l'ottimizzazione del singolo criterio e il bilanciamento necessario di obiettivi multipli. Studiarle matematicamente è quindi esercizio di umiltà intellettuale: riconoscere che gli ingegneri del passato, con strumenti computazionali infinitamente più limitati dei nostri, riuscivano a risolvere problemi di complessità staggering attraverso intuizione, esperienza, iterazione empirica.

E forse la lezione finale è questa: la matematica non sostituisce il giudizio umano ma lo affina, lo quantifica, lo rende comunicabile e verificabile. I grandi architetti militari del passato possedevano quella che oggi chiameremmo "intelligenza matematica incarnata" – capacità di ragionare attraverso problemi complessi, anticipare conseguenze, bilanciare trade-offs – anche senza formalismo matematico esplicito. Il nostro compito, come studiosi moderni equipaggiati con strumenti analitici potenti, è rendere esplicito ciò che era implicito, formalizzare ciò che era intuitivo, e nel processo, guadagnare insights che trascendono il contesto storico specifico e illuminano la struttura universale dei problemi strategici che l'umanità ha sempre affrontato e continua ad affrontare.

Le muraglie cosmiche ci ricordano che la matematica non è invenzione arbitraria ma scoperta di ordine che pervade la realtà. E che questo ordine si manifesta tanto nelle orbite celesti quanto nei bastioni terrestri, tanto nelle equazioni astratte quanto nelle pietre che ancora oggi testimoniano la lotta millenaria tra chi difende e chi attacca, tra chi costruisce e chi distrugge, tra la persistenza dell'ordine e le forze entropiche del caos.

In ultima analisi, studiare matematicamente le fortificazioni è meditare sulla condizione umana: la nostra capacità di creare ordine attraverso ragione, la fragilità di questo ordine di fronte a forze distruttive, e la resilienza che permette la ricostruzione e l'innovazione perpetua. Le muraglie cadono ma i principi matematici che le governarono rimangono, eterni come le leggi che governano il cosmo, pronti a guidare le future generazioni di costruttori, difensori, e studiosi che cercano di comprendere la geometria sottile che collega i bastioni terrestri alle stelle.